SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

(17 DE DICIEMBRE DE 2016)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Escriba la expresión matemática que define el momento de inercia de una figura plana respecto al eje x (I_x). Aplique dicha expresión para calcular dicho momento de inercia del rectángulo de la figura.

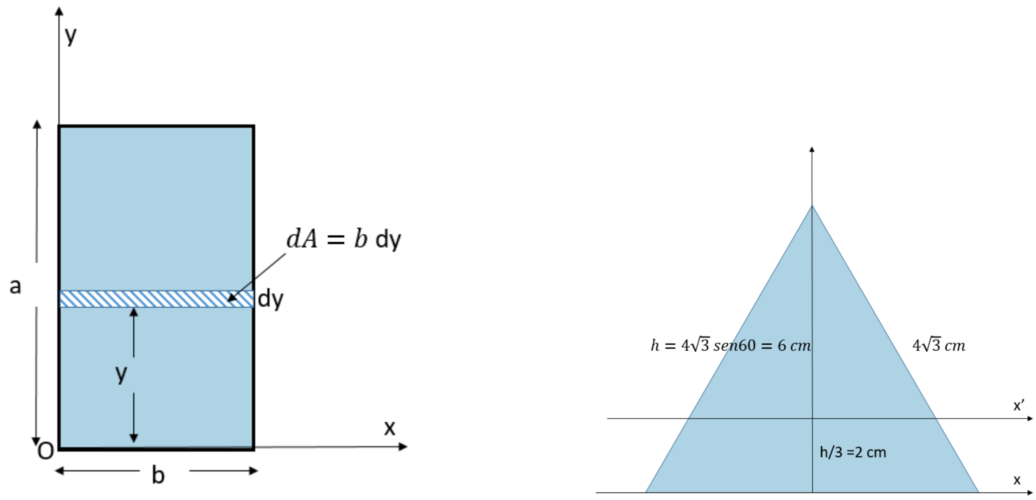

Figura 1: *Cuestiones 1 y 2*

Solución:

$$I_x = \int_A y^2 dA \tag{1}$$

Vamos a aplicar la expresión [1] al área de la figura 1-a. Es fácil observar que $dA = bdy$ en donde la y se extiende desde 0 hasta a, luego:

$$I_x = \int_0^a y^2 bdy = \frac{1}{3}a^3 b \tag{2}$$

2.- a) Enuncie y exprese matemáticamente el teorema de Steiner. b) Sabiendo que el momento de inercia I_x de un triángulo isósceles de lado b y altura h respecto a un eje x que pasa por su centro viene dado por: $I_x = \frac{1}{36}bh^3$, calcule mediante el teorema de Steiner el momento de inercia $I_{x'}$ de un triángulo equilátero de $4\sqrt{3}\,cm$ de lado, respecto de un eje x' que pasa por la base de dicho triángulo.

Solución:

El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área por el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes.

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x'} + d_y^2 A \\ I_y &= I_{y'} + d_x^2 A \end{aligned} \tag{3}$$

En este ejemplo :

$$h = 4\sqrt{3} sen 60^o = 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\, cm$$

por tanto

$$I_x = \frac{1}{36} 6^3 4\sqrt{3} + 2^2 \times \frac{4\sqrt{3}\times 6}{2} = 72\sqrt{3} cm^4 = 125\, cm^4$$

3.-. Una forma sencilla de medir la presión es mediante un manómetro de tubo abierto que consiste en un tubo en forma de U que contiene un líquido (muchas veces agua o mercurio). El manómetro de la figura contiene mercurio, si la altura h es igual a $250\, mm$. ¿cuál es la presión manométrica en el interior del recinto? Si la presión atmósférica en el laboratorio donde tiene lugar dicha medida tiene una valor de $0,9\, atm$, calcule la presión absoluta en el interior del reciento. Dato: $\rho_{Hg} = 13,6\, g \cdot cm^{-3}$

Solución:

$$P_{man} = \rho g h = 13,6 \times 10^3 \times 9,81 \times 0,25 = 3,34 \times 10^4\, Pa \tag{4}$$

$$P_{abs} = P_{man} + P_{atm} = 3,34 \times 10^4 + 0,9 \times 13,6 \times 10^3 \times 9,81 \times 0,76 = 1,25 \times 10^5\, Pa \tag{5}$$

En la expresión [5] , se ha tenido en cuenta que una atmósfera es la presión ejercida por una columna de $760\, mm$ de mercurio.

4.- Como sin duda Vd. conoce el «principio» de Arquímedes, no le será difícil contestar de forma ***razonada***, a las siguientes cuestiones. Si dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua **a)** ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza de flotación? **b**) ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre? **c)** ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior? **d)** ¿Para cuál de ellos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

Dato: $\rho_{Pb} > \rho_{Al}$

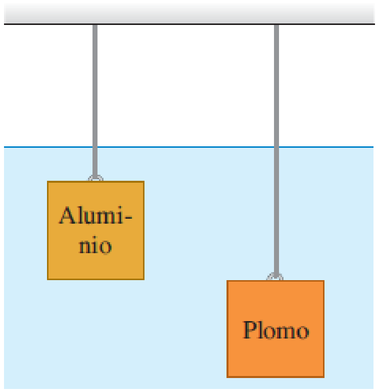

Figura 2: *Cuestión 4*

Solución:

a) Al tener el mismo tamaño, los dos desplazan el mismo volumen, por tanto el empuje es el mismo.

b) El cubo de plomo es más pesado, ya que tiene mayor densidad, por tanto la tensión del cable que lo sostiene es mayor que la tensión en el cable que mantiene al bloque de aluminio.

c) La presión depende de la profundidad, luego al estar la cara inferior del cubo de plomo a mayor profundidad, es por lo cual la fuerza ejercida sobre la cara inferior del plomo es mayor que la del aluminio.

d) La diferencia de presión entre las caras depende de la diferencia de alturas; que es la misma: por tanto la diferencia de presiones entre las dos caras es idéntica para los dos cubos.

5.- Calcule el calor que es necesario aplicar a $250\,g$ de hielo a $-10\,^{o}C$, para convertirlo en vapor de agua a $100\,^{o}$C.

Datos: Calor específico del hielo $c_{hielo} = 2114\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, Calor específico del agua $c_{agua} = 4180\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, Calor latente de fusión del agua $L_f = 334 \cdot 10^3\,J \cdot kg^{-1}$, Calor latente de vaporización del agua $L_v = 226 \cdot 10^3\,J \cdot kg^{-1}$

Solución:

Cuando existe una variación de temperatura, la energía térmica, se calcula mediante la expresión:

$$Q = mc_{es} \triangle T \tag{6}$$

mientras que en un cambio de estado:

$$Q = mL \tag{7}$$

Aplicando sucesivamente las ecuaciones [6] y [7] se tiene:

$$Q = 0,25 \times 2114 \times 10 + 0,25 \times 334 \times 10^3 + 0,25 \times 4180 \times 100 + 0,25 \times 226 \times 10^3 = 2,50 \times 10^5\,J$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1.- Calcule el centroide del área compuesta de la figura 3-a

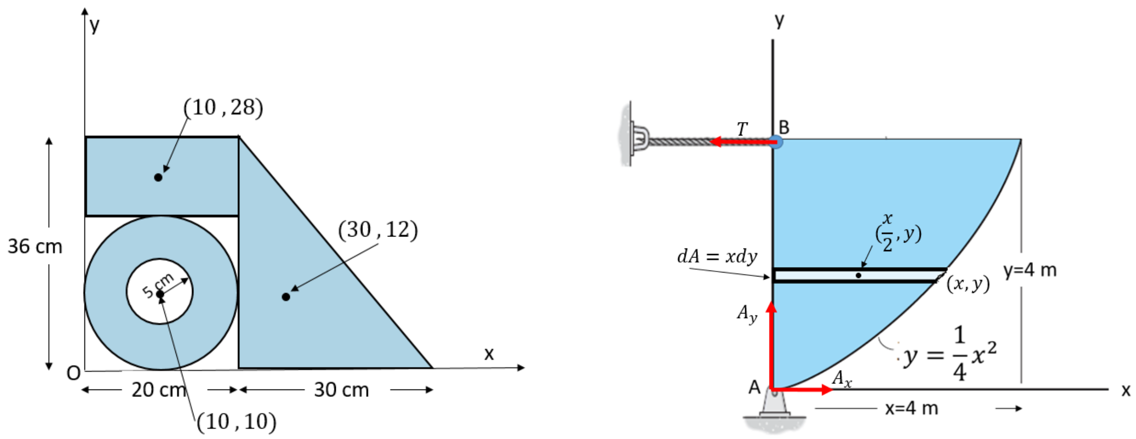

Figura 3: *Problemas 1 y 2*

Solución:

Para cada una de las figuras simples que componen el área compuesta, se han calculado sus centros (ver figura 3-a) y se ha procedido a rellenar la siguiente tabla:

Figura	$Area_i$ (mm^2)	x_i (mm)	y_i (mm)	x_iA_i (mm^3)	y_iA_i (mm^3)
1	$314,16$	10	10	$3141,59$	$3141,59$
2	$-78,54$	10	10	$-785,4$	$-785,4$
3	320	10	28	3200	8960
4	540	30	12	16200	6480
Total	$1096,62\,mm^2$			$21756,19\,mm^3$	$17796,19\,mm^3$

Por consiguiente:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{21756,19}{1096,62}, \frac{17796,19}{1096,62}) \ = (19,9\,mm, 16,2\,mm) \tag{8}$$

Problema 2.- La placa de la figura 3-b, está hecha de acero que tiene una densidad de $7850\,kg \cdot m^{-3}$. Si el espesor de la placa es de $10\,mm$, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en la articulación A y la tensión en el cable B.

Solución:

Para poder calcular las reacciones en A y la tensión de la cuerda, previamente necesitamos conocer el peso de la placa, y su punto de aplicación. Para lo primero necesitamos calcular el área de dicha placa y para lo segundo la coordenada $\overline{X}$ del centroide.

En primer lugar vamos a proceder a calcular el área A.Observando la figura 3-b;

$$A = \int_0^4 xdy = \int_0^4 2y^{\frac{1}{2}}dy = \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{32}{3}\,m^2 \tag{9}$$

entonces el peso de la placa es:

$$W = mg = V\rho g = Ae\rho g = \frac{32}{3} \times 0,01 \times 7850 \times 9,81 = 8214\,N$$

Vamos a obtener ahora la posición $\bar{X}$, de la figura,

$$\bar{X} = \frac{\int \widetilde{x} dA}{A} = \frac{\int_0^4 \frac{x}{2} x dy}{\frac{32}{3}} = \frac{\left[y^2\right]_0^4}{\frac{32}{3}} = 1,5\,m \tag{10}$$

Aplicamos las condiciones de equilibrio:

$$A_x - T = 0$$
$$A_y - 8214 = 0$$
$$T \times 4 - 8214 \times 1,5 = 0$$

La solución de este sistema de ecuaciones:

$$A_x = T = 3080\,N \quad ; \qquad A_y = 8214\,N$$

Problema 3.- a) Determine la posición del centroide de la sección transversal de la viga de la figura. b) Determine los momentos de inercia I_x,I_y y el producto de inercia I_{xy} para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes centroidales x, y. b) Mediante el círculo de Mhor obtenga los momentos principales de inercia, así como los ejes principales de inercia.

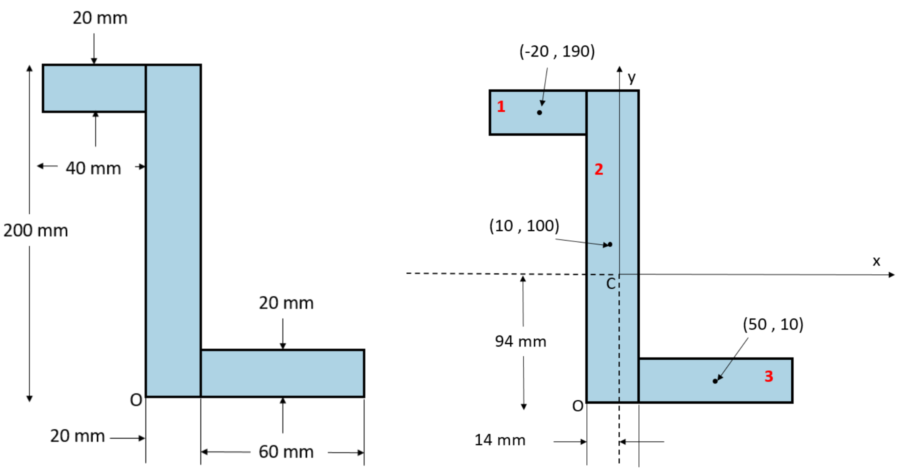

Figura 4: *Problema 3*

Solución:

Al igual que se procedió en el problema 1 calcularemos la posición del centroide de la figura compuesta $(\bar{X}, \bar{Y})$

Figura	$Area\ (mm^2)$	$x\ (mm)$	$y\ (mm)$	$xA\ (mm^3)$	$yA\ (mm^3)$
1	800	-20	190	-16000	152000
2	4000	10	100	40000	40000
3	1200	50	10	60000	12000
Total	$6000\ mm^2$			$84000\ mm^3$	$564000\ mm^3$

Por tanto:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{84000}{6000}, \frac{564000}{6000}) \ = (14\ mm, 94\ mm) \tag{11}$$

Como tenemos que aplicar el teorema de Steiner para calcular los momentos y productos de inercia respecto a ejes que pasan por el centroide; es necesario calcular la distancia entre los ejes que pasan por el centro de cada una de la figuras y los ejes que pasan por el centroide. En la siguiente tabla se muestran las distancias respectivas:

Figura	$d_x\ (mm)$	$d_y\ (mm)$
1	$-20-14=-34$	$190-94=96$
2	$10-14=-4$	$100-94=6$
3	$50-14=36$	$10-94=-84$

Ahora ya podemos proceder a calcular los momentos de inercia de cada una de las figuras y los momentos de inercia totales. Teniendo en cuenta que para un rectángulo la expresión del momento de inercia con respecto a ejes que pasan por su centro son:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \tfrac{1}{12} b^3 a \\ I_{y'} &= \tfrac{1}{12} a^3 b \\ I_{x'y'} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

De forma sistemática realizamos las siguientes tablas:

Figura	$I_{x'}\ (mm^4)$	$I_{y'}\ (mm^4)$	$I_{x'y'}(mm^4)$
1	$\frac{1}{12}40\times 20^3$	$\frac{1}{12}40^3\times 20$	0
2	$\frac{1}{12}20\times 200^3$	$\frac{1}{12}200\times 20^3$	0
3	$\frac{1}{12}60\times 20^3$	$\frac{1}{12}20\times 60^3$	0

Figura	$I_x\ (mm^4) = I_{x'} + d_y^2 A$	$I_y\ (mm^4) = I_{y'} + d_x^2 A$	$I_{xy}\ (mm^4) = I_{x'y'} + d_x d_y A$
1	$\frac{1}{12}40\times 20^3 + 96^2\times 800$	$\frac{1}{12}40^3\times 20 + (-34)^2\times 800$	$-34\times 96\times 800$
2	$\frac{1}{12}20\times 200^3 + 6^2\times 4000$	$\frac{1}{12}200\times 20^3 + (-4)^2\times 4000$	$-4\times 6\times 4000$
3	$\frac{1}{12}60\times 20^3 + 84^2\times 1200$	$\frac{1}{12}20\times 60^3 + 36^2\times 1200$	$36\times(-84)\times 1200$
Total	$29,4\times 10^6\ mm^4$	$3,14\times 10^6\ mm^4$	$-6,34\times 10^6\ mm^4$

El tensor de inercia correspondiente a la sección de la figura es:

$$\begin{pmatrix} 29,4 & -6,34 \\ -6,34 & 3,14 \end{pmatrix} \times 10^6\ mm^4$$

El cálculo de los momentos pricipales y ejes principales de inercia, lo realizamos mediante el círculo de Mohr, que mostramos en la figura:

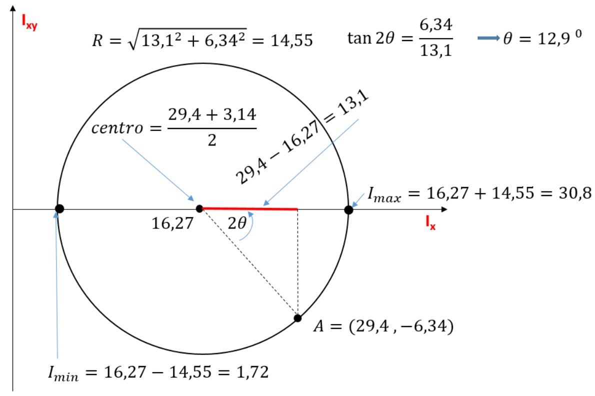

Figura 5: *Círculo de Mohr*

Los ejes principales se obtienen girando $14,5^0$en sentido contrario al movimiento de las agujas del rejoj.

Respecto de estos ejes el tensor de inercia vinene dado:

$$\begin{pmatrix} 30,8 & 0 \\ 0 & 1,72 \end{pmatrix} \times 10^6\, mm^4$$

Resultado que podríamos haber llegado tras diagonalizar la matriz :

$$\begin{pmatrix} 29,4 & -6,34 \\ -6,34 & 3,14 \end{pmatrix} \times 10^6\, mm^4$$

Problema 4.-Una barra de acero de $20,0\,cm$ de longitud se suelda extremo con extremo a una barra de cobre de $30,0cm$ de longitud. Ambas están perfectamente aisladas por sus costados. Las barras tienen la misma sección transversal cuadrada de $2,00\ cm$ por lado. El extremo libre de la barra de acero se mantiene a $100\,°C$ poniéndolo en contacto con vapor de agua, y el de la barra de cobre se mantiene a $0\,°C$ poniéndolo en contacto con hielo. Calcule la temperatura en la unión de las dos barras y la tasa de flujo de calor total. Datos: conductividad térmica del acero $\kappa_{acero} = 50,2\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$; conductividad térmica del cobre $\kappa_{cobre} = 385\,W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$

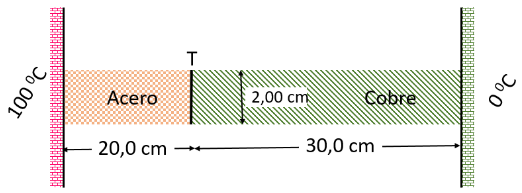

Figura 6: *Barra de acero en contacto con otra de cobre*

Solución:

Empezaremos el ejercicio calculando la resistencia térmica de cada una de las barras, teniendo cuidado con sustituir todos los valores en unidades del S.I.

$$R = \frac{l}{\kappa A} \tag{13}$$

Si en la ecuación [1] sustituimos los valores para cada una de las barras, se tiene:

$$R_{acero} = \frac{0,2}{50,2 \times 4 \times 10^{-4}} = 9,96\, W^{-1} \cdot K \quad ; \quad R_{cobre} = \frac{0,3}{385 \times 4 \times 10^{-4}} = 1,95\, W^{-1} \cdot K \tag{14}$$

Por tanto la resistencia térmica total del conjunto de las dos barras en *«serie»*

$$R_{total} = 9,96\, W^{-1} \cdot K + 1,95\, W^{-1} \cdot K = 11,9\, W^{-1} \cdot K$$

La tasa de flujo de calor o corriente térmica, viene dada:

$$H = \frac{\triangle T}{R} = \frac{100}{11,9} = 8,40\, W$$

la temperatura en la unión de las dos barras la podemos calcular, aplicando la *«ley de Ohm»* para la transferencia de calor a cualquiera de las dos barras.

La aplicamos a la barra de acero:

$$100 - T = 8,40 \times 9,96\, ; \Longrightarrow T = 16,3^0$$

Si la aplicamos a la barra de cobre:

$$T - 0 = 8,40 \times 1,95 = 16,3^0$$

Problema 5.-Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de $12m^2$ y $1200\, kg$ de masa. El nivel del agua en el depósito es de $3,5\, m$ de altura. Calcule la presión en el fondo. Si se abre un orificio circular de $5\, cm$ de radio a medio metro por encima del fondo, calcúlese el volumen de agua que sale por segundo por este orificio. (Se considera que el área del orificio es muy pequeña frente al área del depósito). Tomar $g = 10\, m \cdot s^{-2}$. tome el valor de la presión atmosférica, $P_{atm} = 10^5\, Pa$

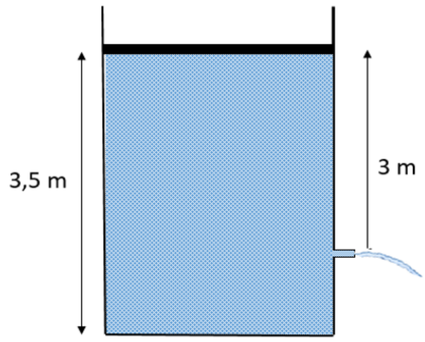

Figura 7: *Depósito de agua*

Solución:

La presión en el fondo del depósito es debido a tres causas: a la ejercida por la presión atmosférica, la ejercida por el peso de la placa deslizante y a la presión hidrostática:

$$P_{fondo} = 10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} + 10^3 \times 10 \times 3,5 = 1,36 \times 10^5 \; Pa$$

la velocidad de salida la vamos a calcular aplicando la ecuación de Bernoulli entre un punto justo debajo de la placa y otro justo en en el orificio:

$$10^5 + \frac{1200 \times 10}{12} + 10^3 \times 10 \times 3,5 + \frac{1}{2}10^3 \times 0^2 = 10^5 + 10^3 \times 10 \times 0,5 + \frac{1}{2}10^3 \times v^2 \qquad (15)$$

En donde se ha tenido en cuenta que la velocidad con la cual desciende el nivel del depósito es prácticamente 0 dado que la superficie de este mucho mayor que la sección del orificio. El nivel de referencia se ha tomado en el punto más bajo del depósito.

Despejando la velocidad v de la ecuación [15] se tiene que:

$$v = \sqrt{62} = 7,87 \, m \cdot s^{-1}$$

Siendo el gasto o caudal:

$$G = Av = \pi(5 \times 10^{-2})^2 \times 7,87 = 6,18 \times 10^{-2} \, m^3 \cdot s^{-1} = 61,8 \, l \cdot s^{-1}$$