UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

Física I Sólido rígido. Sistemas Equivalentes. Tema4

Objetivos

- Analizar el concepto del momento de una fuerza y mostrar cómo calcularla en dos y tres dimensiones.
- Proporcionar un método para encontrar el momento de una fuerza con respecto a un eje específico.
- Definir el momento de un par.
- Presentar métodos para determinar las resultantes de sistemas de fuerzas no concurrentes.
- Indicar cómo reducir una carga simple distribuida a una fuerza resultante con una ubicación específica.

Introducción

- El tratamiento de un cuerpo como una sola partícula no siempre es posible. En general, el tamaño del cuerpo y los distintos puntos de aplicación de las fuerzas tienen que tenerse en cuenta

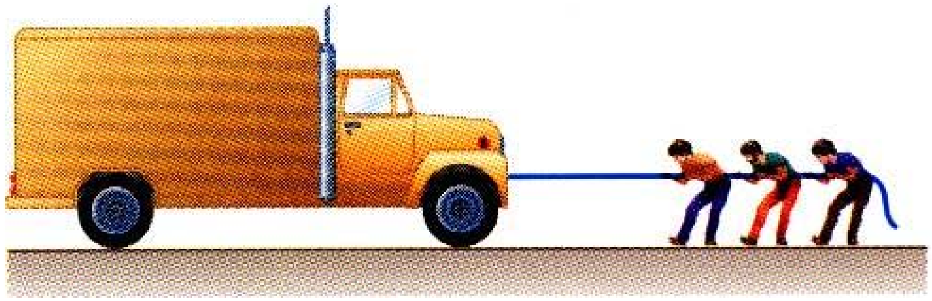
- La mayoría de los cuerpos en mecánica elemental se supone que son rígidos, es decir, las deformaciones reales son pequeñas y no afectan a las condiciones de equilibrio o de movimiento .

- En el presente capítulo se describe el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y la forma de sustituir un sistema dado de fuerzas por un sistema equivalente más simple.
  Momento de una fuerza respecto a un punto
  Momento de una fuerza respecto a un eje
  Momento debido a un par

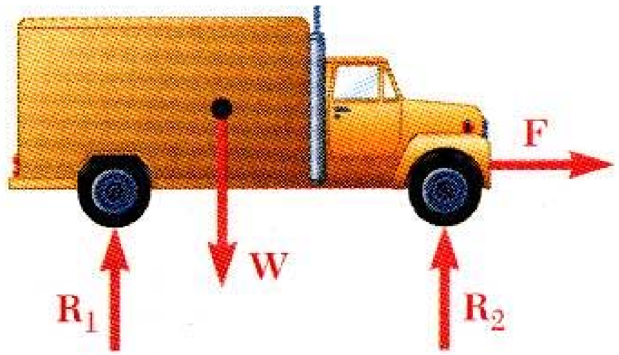
- Cualquier sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consiste en una fuerza que actúa en un punto dado y un par de fuerzas .

Fuerzas exteriores y fuerzas interiores

- Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se dividen en dos grupos:
  Las fuerzas externas
  Las fuerzas internas



- Las fuerzas externas se muestran en un diagrama de cuerpo libre.

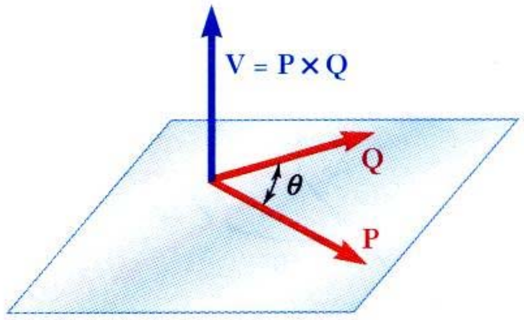


- Sin oposición, cada fuerza externa puede dar un movimiento de traslación o rotación, o ambos.

Producto Vectorial de dos vectores

- El concepto de momento de una fuerza alrededor de un punto es más fácil de entender a través de aplicaciones del producto vectorial o producto cruz.

- Producto vectorial de dos vectores P y Q se define como el vector V que satisface las siguientes condiciones:
  1. La línea de acción de V es perpendicular al plano que contiene P y Q.
  2. Magnitud de $\boldsymbol{V}$ es $V = PQ \sin\theta$
  3. El sentido de $\boldsymbol{V}$ se obtiene mediante la regla de la mano derecha,



(a)

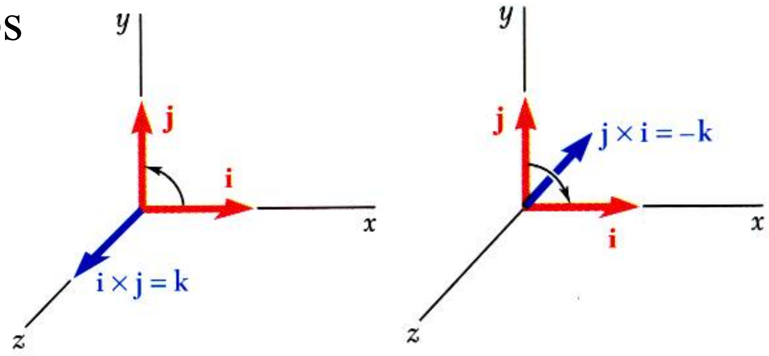
(b)

- Productos vectoriales:
  - No son conmutativos, $\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{P} = -(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q})$
  - Son distributivos, $\boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_2) = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}_2$
  - No son asociativos, $(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{Q}) \times \boldsymbol{S} \neq \boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{S})$

Producto vectorial: Componentes Rectangulares

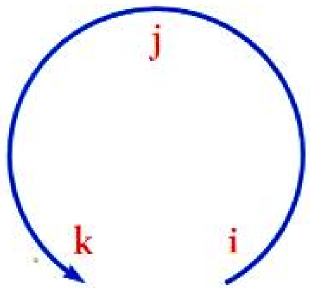
- Productos vectoriales de los vectores unitarios cartesianos,

$$\vec{i}\times\vec{i}=0 \qquad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\times\vec{j}=0 \qquad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$$
$$\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} \qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\times\vec{k}=0$$



- Productos vectoriales en términos de coordenadas rectangulares,

$$\vec{V}=\left(P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}\right)\times\left(Q_x\vec{i}+Q_y\vec{j}+Q_z\vec{k}\right)$$
$$=\left(P_yQ_z-P_zQ_y\right)\vec{i}+\left(P_zQ_x-P_xQ_z\right)\vec{j}$$
$$+\left(P_xQ_y-P_yQ_x\right)\vec{k}$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$



Momento de una Fuerza respecto a un punto

- Un vector de fuerza se define por su magnitud y dirección. Su efecto sobre el cuerpo rígido también depende del punto de aplicación.

- El *momento* de $\boldsymbol{F}$ respecto O se define como:

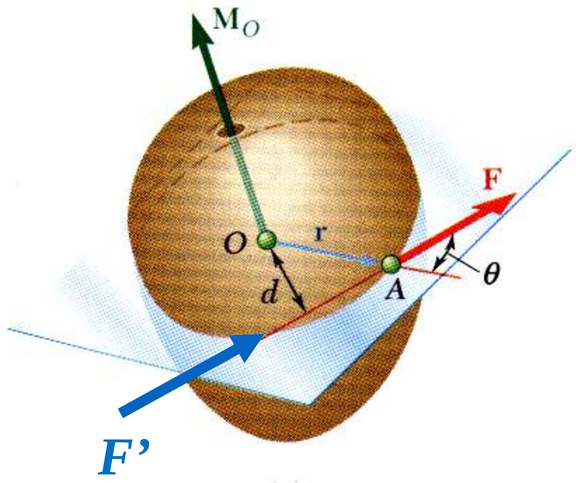
$$\boldsymbol{M_O} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

- El vector momento $\boldsymbol{M_O}$ es perpendicular al plano que contiene O y la fuerza $\boldsymbol{F}$.

- La magnitud de $\boldsymbol{M_O}$ mide la tendencia de la fuerza para provocar la rotación del cuerpo alrededor de un eje a lo largo de $\boldsymbol{M_O}$.

$$M_O = rF \sin\theta = Fd$$

El sentido del momento puede ser determinado por la regla de la mano derecha.



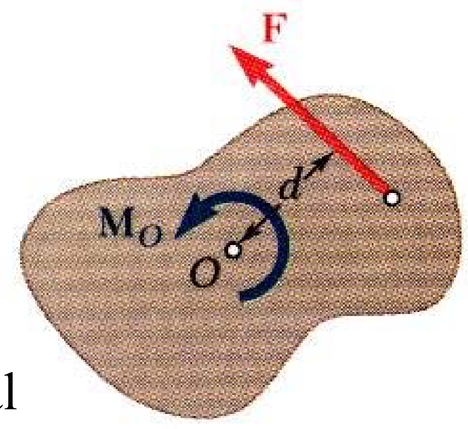
(a)

(b)

- Cualquier fuerza ***F'*** que tenga la misma magnitud y direccion que ***F***, es *equivalente* si también tiene la misma línea de acción y, por tanto, produce el mismo momento.

Momento de una Fuerza respecto a un punto

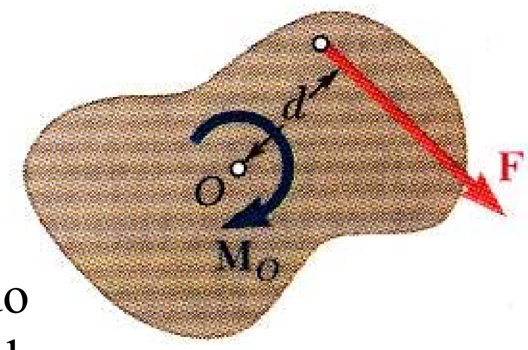
- Las estructuras de dos dimensiones tienen largo y ancho, pero insignificante profundidad y están sometidos a fuerzas que figuran en el plano de la estructura.



(a) $M_O = +Fd$

- El plano de la estructura contiene el punto O y la fuerza $\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{M_O}$, el momento de la fuerza respecto a O es perpendicular al plano.

- Si la fuerza tiende a girar la estructura en sentido contrario al del movimiento de la manecillas del reloj, el sentido del vector momento está fuera del plano de la estructura y la magnitud del momento es positivo.



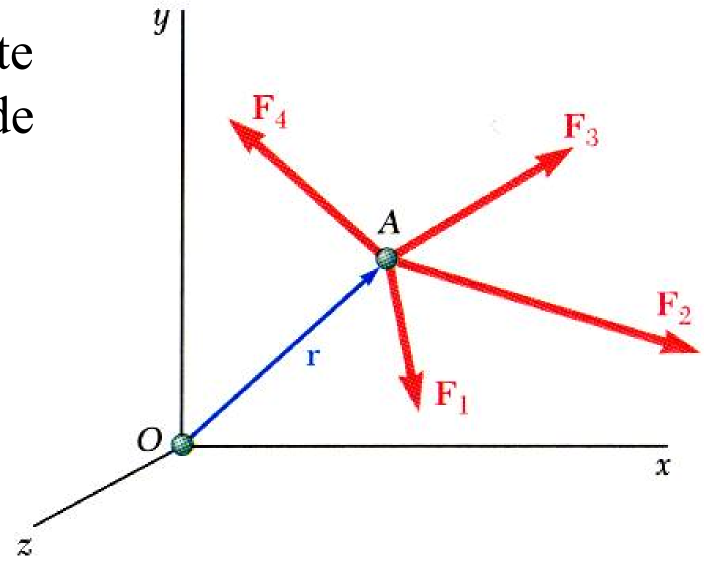
(b) $M_O = -Fd$

- Si la fuerza tiende a girar la estructura en el mismo sentido al del movimiento de la manecillas del reloj, el sentido del vector momento es en el plano de la estructura y la magnitud del momento es negativo.

Teorema de Varignon

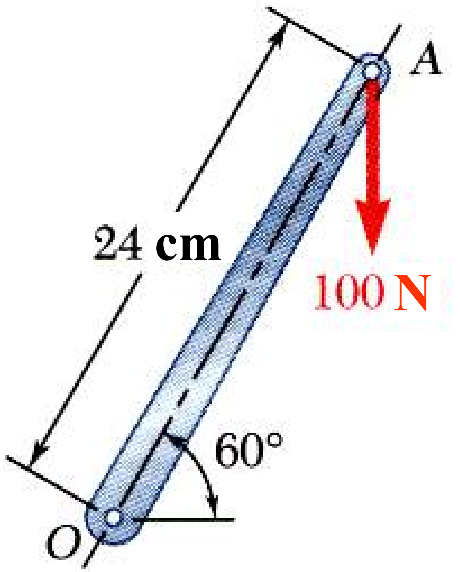
•El momento respecto a un punto O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de los diversos momentos de cada una de las fuerzas sobre el mismo punto O.

$$\vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots$$



• El teorema de Varignon hace que sea posible sustituir la determinación directa del momento de una fuerza ***F*** por los momentos de dos o más fuerzas componentes de ***F***.

Ejemplo 4.1



Una fuerza vertical de 100 N se aplica al extremo de una palanca que se adjunta a un eje en O.

Determinar:

a) momento en *O*,

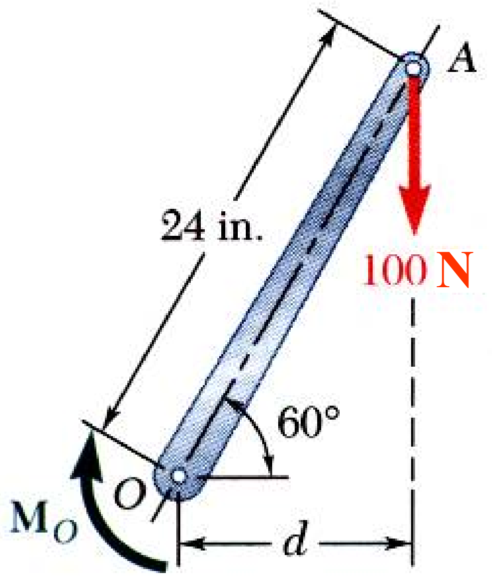
b) una fuerza horizontal en A en el que se crea el mismo momento

c) la menor fuerza en A que produce el mismo momento

d) A qué distancia de O se tiene que aplicar una fuerza de 240 N para producir el mismo momento.

e) ¿ alguna de las fuerzas de b, c, y d es equivalente a la fuerza original.?

Ejemplo 4.1



a) Momento respecto a O es igual al producto de la fuerza y la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y O. Puesto que la fuerza tiende a girar la palanca en sentido horario, el vector momento es en el plano del papel.

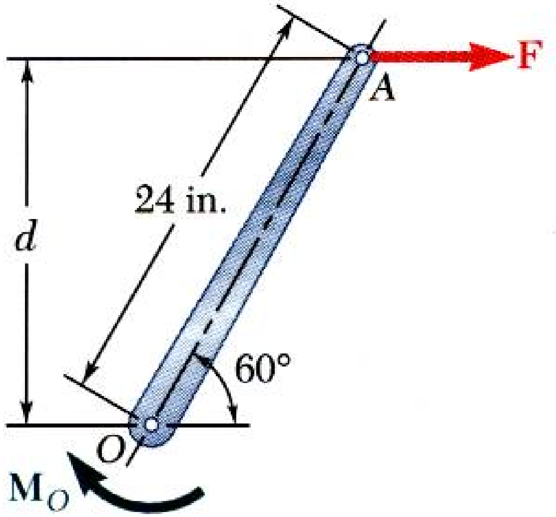
$$M_O = Fd$$

$$d = (0,24)\cos 60° = 0,12m.$$

$$M_O = (100\text{ N})(0,12\text{m})$$

$$\boxed{M_O = -12N \cdot m}$$

Ejemplo 4.1



b) Fuerza horizontal en *A* que produce el mismo momento

$$d = (0,24m)\sin 60° = 0,208 \text{ m}$$

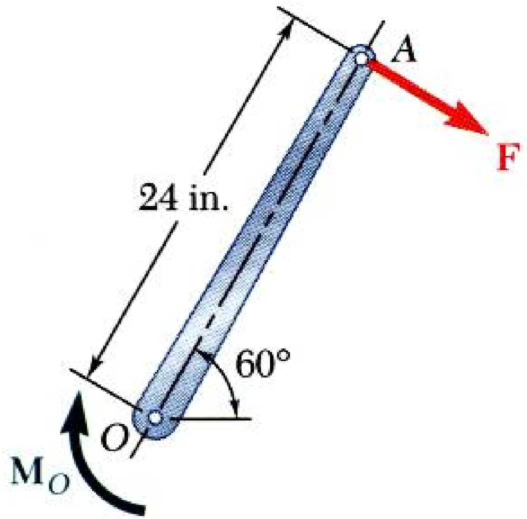
$$M_O = Fd$$

$$12\text{N}\cdot\text{m} = F\,(0,208 \text{ m})$$

$$F = \frac{12N\cdot m}{0,208 \text{ m}}$$

$$\boxed{F = 57,7 \text{ N}}$$

Ejemplo 4.1



c) La menor fuerza aplicada en A , para producir el mismo momento se produce cuando la distancia perpendicular es un máximo o cuando F es perpendicular a OA.

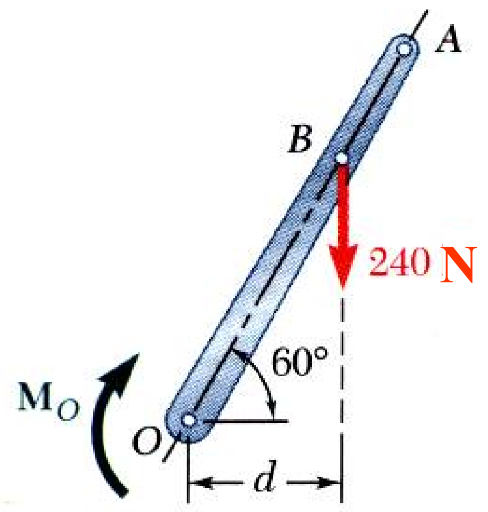
$$M_O = Fd$$

$$12N = F\left(0,24\ \text{m}\right)$$

$$F = \frac{12N \cdot m}{0,24\ \text{m}}$$

$$\boxed{F = 50\ \text{N}}$$

Ejemplo 4.1



d) Determinar el punto de aplicación de una fuerza de 240 N para producir el mismo momento,

$$M_O = Fd$$

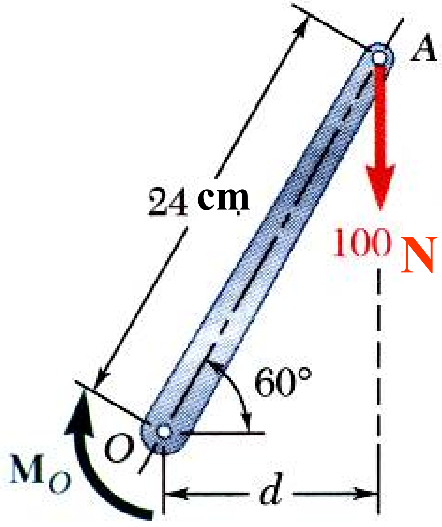
$$12 \text{ N} \cdot \text{m} = (240 \text{ N}) d$$

$$d = \frac{12 \text{ N} \cdot \text{m}}{240 \text{ N}} = 0{,}05m$$

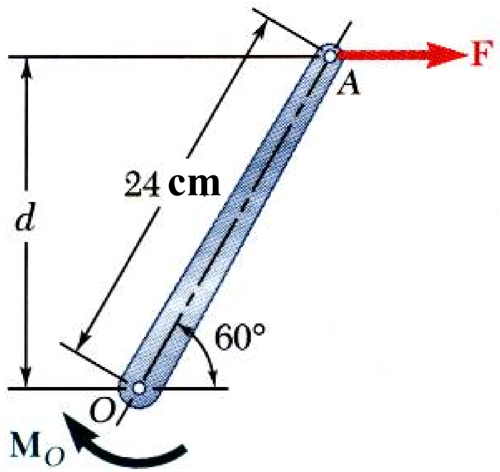
$$OB \cos 60° = 5\text{cm}$$

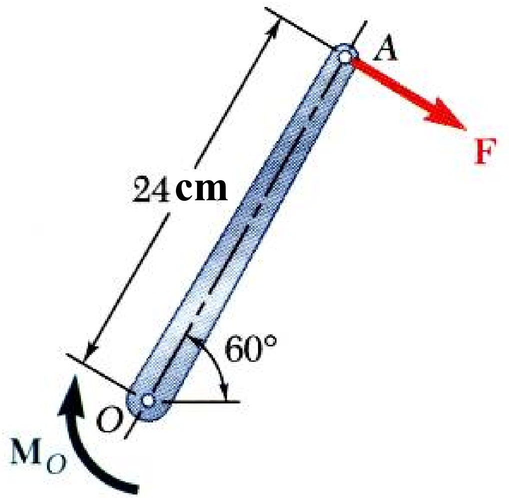
$$\boxed{OB = 10 \text{ cm}}$$

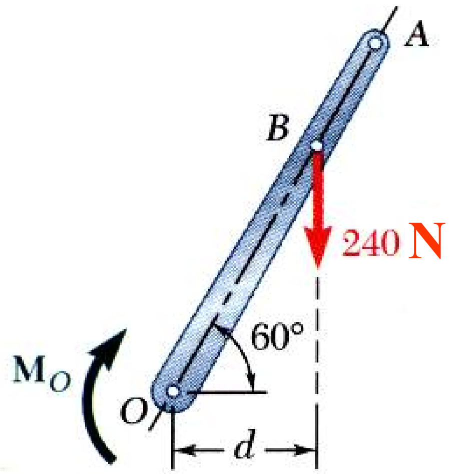
Ejemplo 4.1



e) Aunque cada una de las fuerzas en las partes b), c), y d) produce el mismo momento que la fuerza de 100 N, no son de la misma magnitud y sentido, o en la misma línea de acción. Ninguna de las fuerzas es equivalente a la fuerza de 100 N.

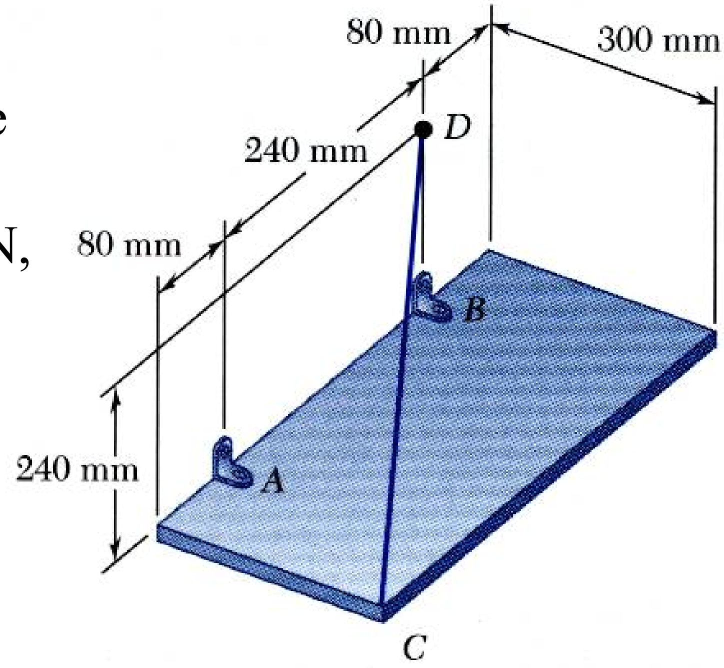






Ejemplo 4.2

La placa rectangular se mantiene con el apoyo de los soportes en A y B y por un alambre CD. Sabiendo que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento en A, de la fuerza ejercida por el alambre en C.

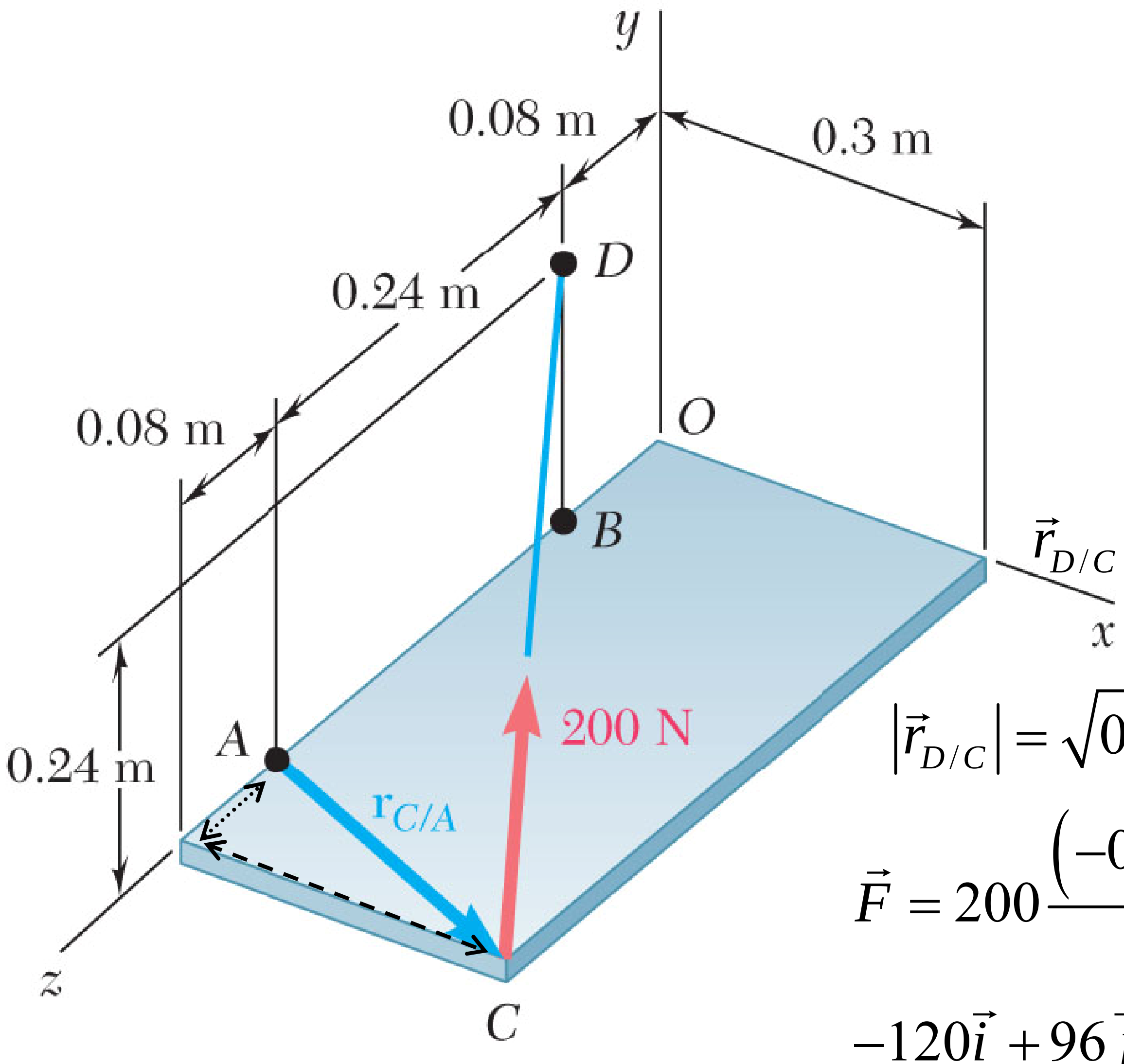


SOLUCION:

El momento M_A de la fuerza F ejercida por el cable se obtiene al evaluar el producto vectorial, $\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$

Notación $\vec{r}_{C/A}$ **vector con origen en A (punto respecto al cual se calcula el momento) y extremo en C (punto de aplicación de la fuerza)**

Solución ejemplo 4.2



$$\vec{r}_{C/A} = 0,3\vec{i} + 0,08\vec{k}$$

$$D(0,\ 0,24,\ 0,08)$$

$$C(0,3,\ 0,\ 0,4)$$

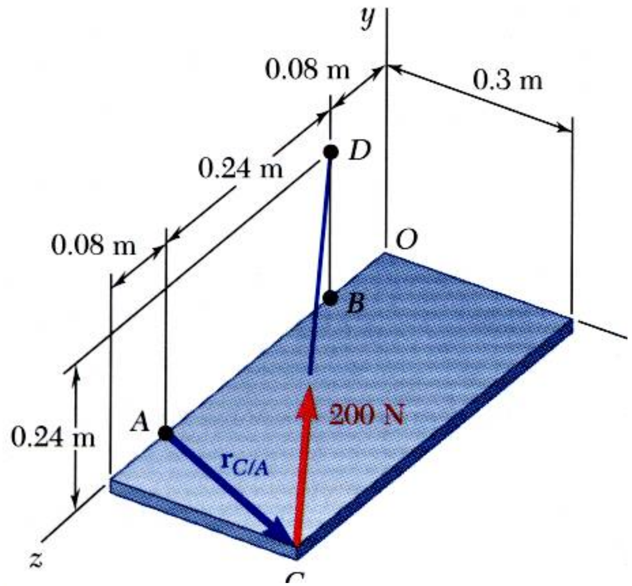
$$\vec{r}_{D/C} = -0,3\vec{i} + 0,24\vec{j} - 0,32\vec{k}$$

$$\left|\vec{r}_{D/C}\right| = \sqrt{0,3^2 + 0,24^2 + 0,32^2} = 0,5m$$

$$\vec{F} = 200\frac{\left(-0,3\vec{i} + 0,24\vec{j} - 0,32\vec{k}\right)}{0,5} =$$

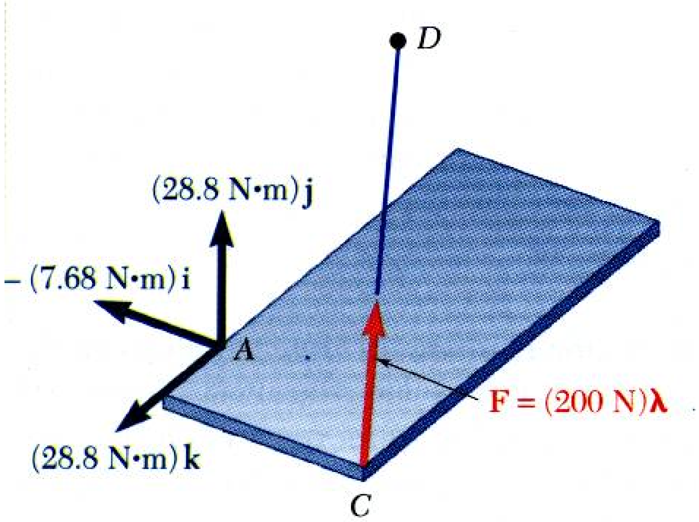
$$-120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k}$$

Solución ejemplo 4.2



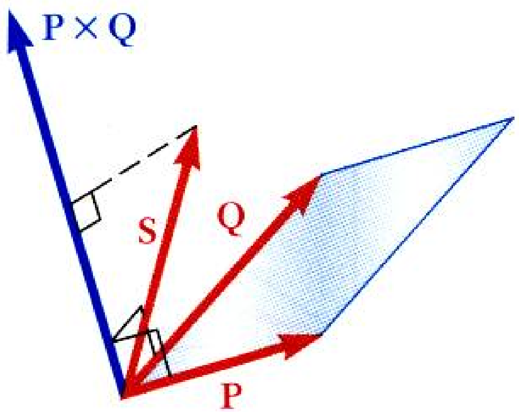
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$



$$\boxed{\vec{M}_A = -(7.68\ \mathrm{N \cdot m})\vec{i} + (28.8\ \mathrm{N \cdot m})\vec{j} + (28.8\ \mathrm{N \cdot m})\vec{k}}$$

Producto Mixto De Tres Vectores



- Producto mixto triple de tres vectores,

$$\vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) = \text{resultado escalar}$$

- Los seis productos mezclados de forma triple de S, P y Q tienen magnitudes iguales pero no el mismo signo,

$$\begin{aligned}\vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) &= \vec{P} \bullet \left(\vec{Q} \times \vec{S}\right) = \vec{Q} \bullet \left(\vec{S} \times \vec{P}\right) \\ &= -\vec{S} \bullet \left(\vec{Q} \times P\right) = -\vec{P} \bullet \left(\vec{S} \times \vec{Q}\right) = -\vec{Q} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{S}\right)\end{aligned}$$

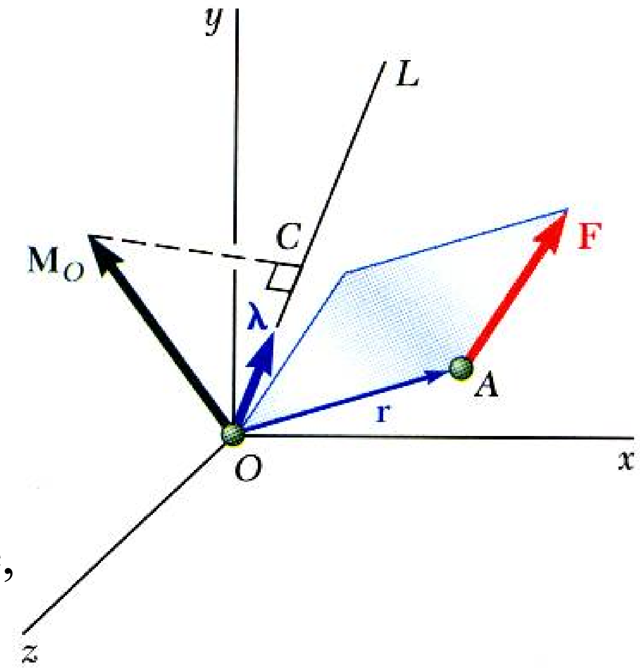
- Evaluación del producto mixto

$$\begin{aligned}\vec{S} \bullet \left(\vec{P} \times \vec{Q}\right) &= S_x\left(P_y Q_z - P_z Q_y\right) + S_y\left(P_z Q_x - P_x Q_z\right) \\ &\quad + S_z\left(P_x Q_y - P_y Q_x\right) \\ &= \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Momento De Una Fuerza sobre un eje

- Momento $\boldsymbol{M_O}$ de una fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada al punto $\boldsymbol{A}$ sobre el punto $\boldsymbol{O}$,

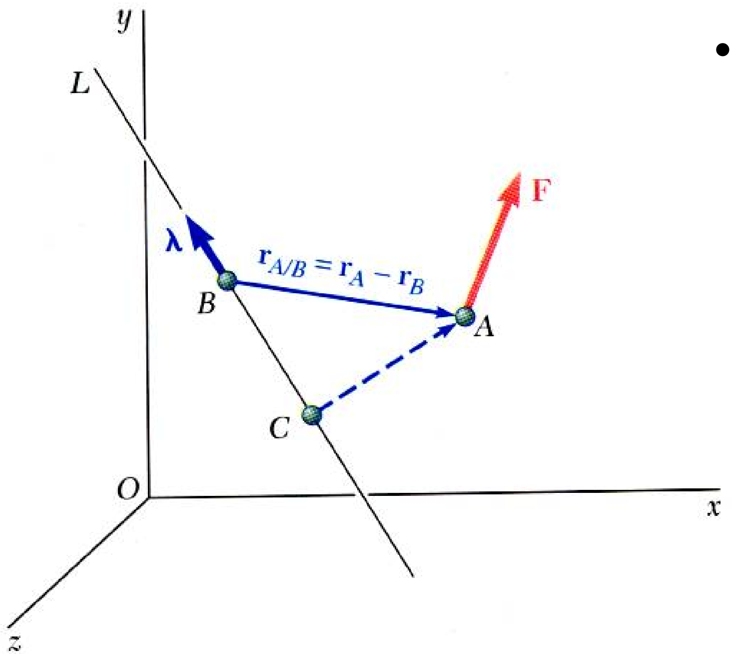
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



- Momento escalar M_{OL} sobre un eje $\boldsymbol{OL}$ es la proyección del momento vectorial $\boldsymbol{M_O}$ sobre el eje,

$$M_{OL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_O = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$

Momento de una fuerza sobre un eje . Ejemplo 4.3



- Momento de una fuerza sobre un eje arbitrario ,

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B$$

$$= \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{BA} \times \vec{F} \right)$$

$$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$$

- El resultado es independiente del punto B a lo largo del eje dado.

$$\vec{F} = 30\vec{i} + 20\vec{j} - 10\vec{k}$$

Aplicada en el punto A(1,-1,1)

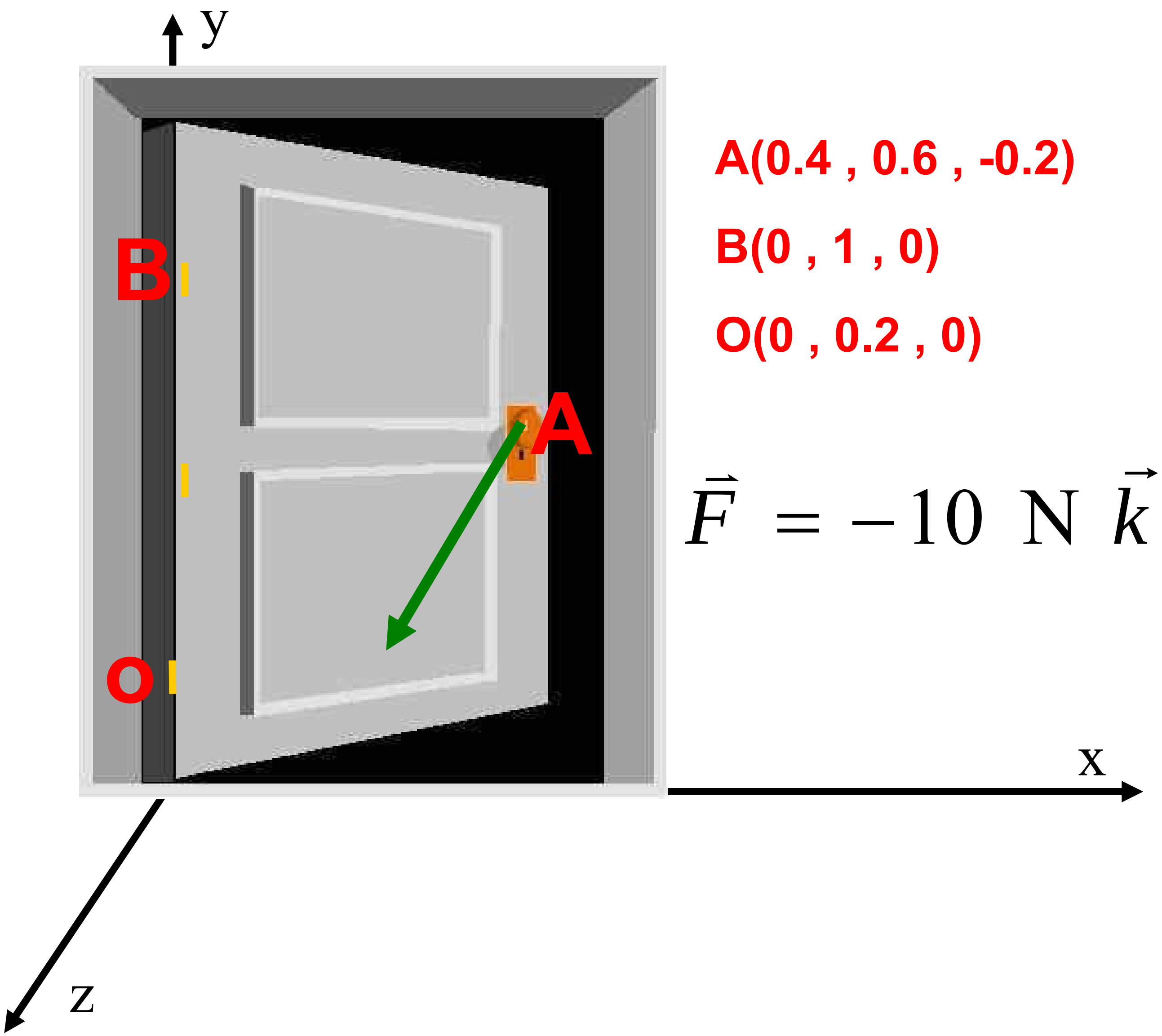
$$P(1,2,-4)$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{-1}$$

$$Q(3,8,-6)$$

Solución: $\boxed{\dfrac{290}{\sqrt{11}} N \cdot m}$

Ejemplo 4.4 Momento de F respecto al eje de la puerta



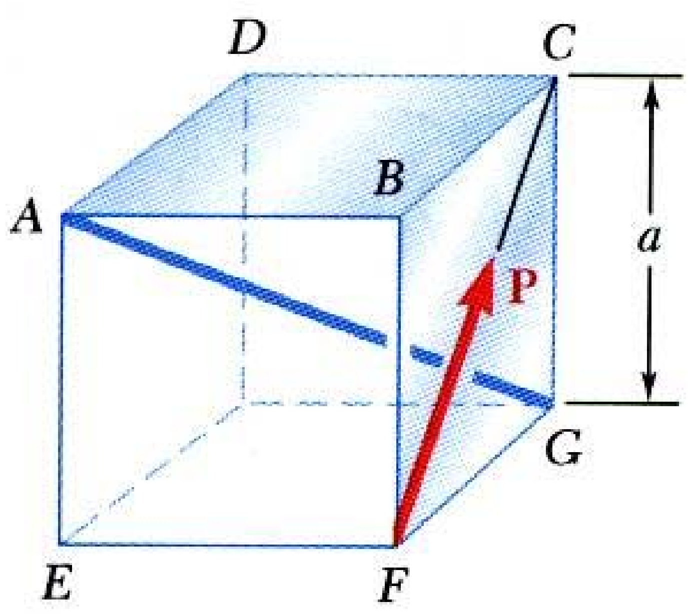
A(0.4 , 0.6 , -0.2)

B(0 , 1 , 0)

O(0 , 0.2 , 0)

$$\vec{F} = -10 \text{ N } \vec{k}$$

Ejemplo 4.5



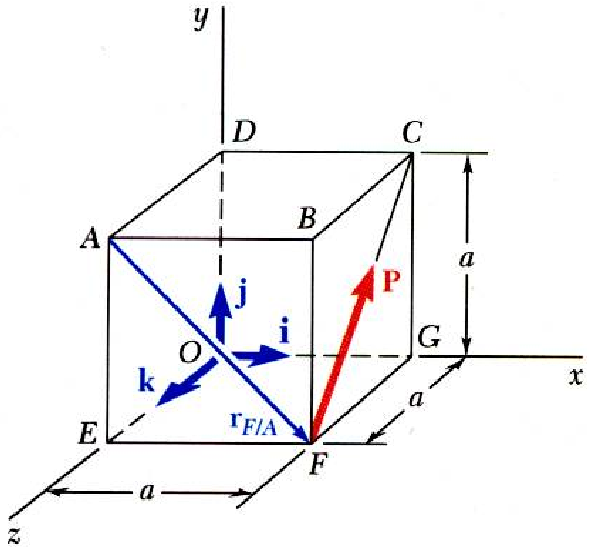
Sobre un cubo actúa una fuerza **_P_** como se muestra en la figura. Determina el momento de **_P_**

a) respecto *A*

b) Respecto a la arista *AB*

c) Respecto a la diagonal *AG* del cubo.

Solución ejemplo 4.5



$$\vec{P} = \frac{P}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k})$$

$$\vec{M}_A = a(\vec{i} - \vec{j}) \times \frac{P}{\sqrt{2}}(\vec{j} - \vec{k}) =$$

$$\frac{aP}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

- Momento de ***P*** sobre *A*,

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AF} \times \vec{P}$$

$$\vec{r}_{AF} = a\vec{i} - a\vec{j} = a\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$$

$$\vec{P} = P\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j}\right) = P\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\vec{M}_A = a\left(\vec{i} - \vec{j}\right) \times P\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \left(aP\sqrt{2}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)}$$

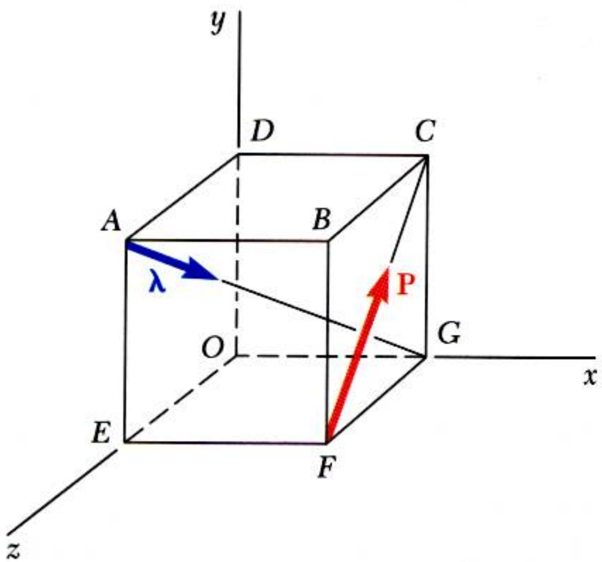
- Momento de ***P*** sobre *AB*,

$$M_{AB} = \vec{i} \bullet \vec{M}_A$$

$$= \vec{i} \bullet \left(aP\sqrt{2}\right)\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$\boxed{M_{AB} = aP\sqrt{2}}$$

Solución ejemplo 4.5



- Momento de ***P*** sobre la diagonal *AG*,

$$M_{AG} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_A$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{AG}}{r_{AG}} = \frac{a\vec{i} - a\vec{j} - a\vec{k}}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right)$$

$$\vec{M}_A = \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

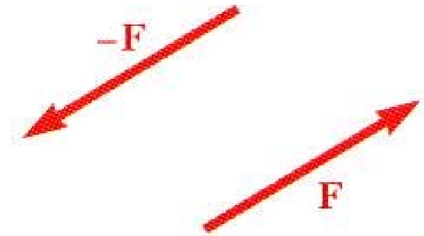
$$M_{AG} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\right) \bullet \frac{aP}{\sqrt{2}}\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$= \frac{aP}{\sqrt{6}}\left(1 - 1 - 1\right)$$

$$\boxed{M_{AG} = -\frac{aP}{\sqrt{6}}}$$

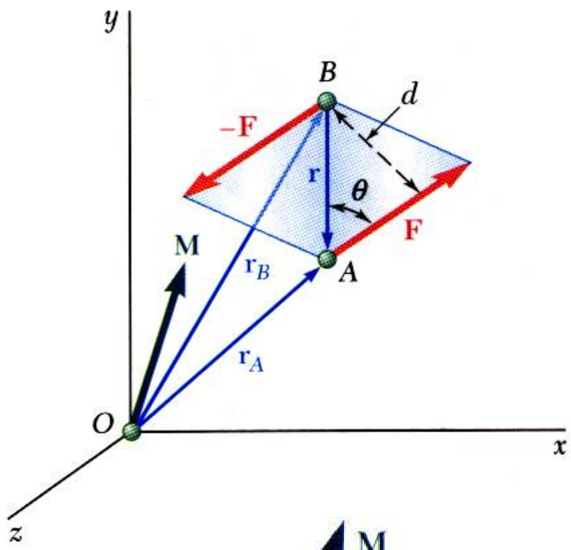
Momento de un Par

- Dos fuerzas ***F*** y ***-F*** que tiene la misma magnitud, líneas paralelas de acción y sentido opuesto se dice que forman un par.

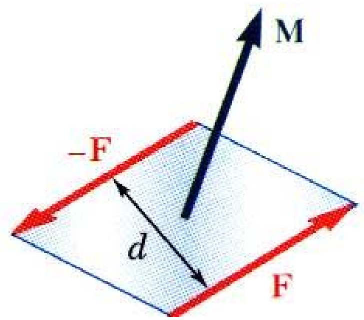


- Momento de un par,

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \left(-\vec{F}\right)$$
$$= \left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r} \times \vec{F}$$
$$M = rF \sin\theta = Fd$$



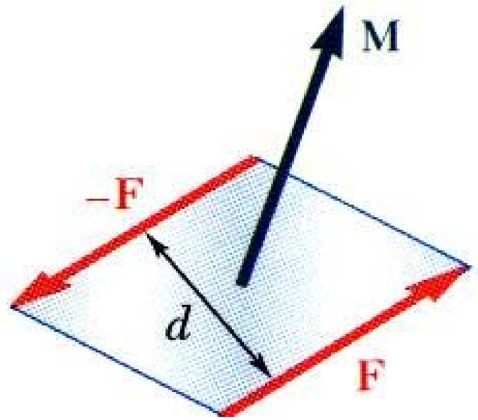
- El vector momento del par es independiente de la elección del origen de los ejes de coordenadas, es decir, es ***un vector libre*** que se pueden aplicar en cualquier punto con el mismo efecto.

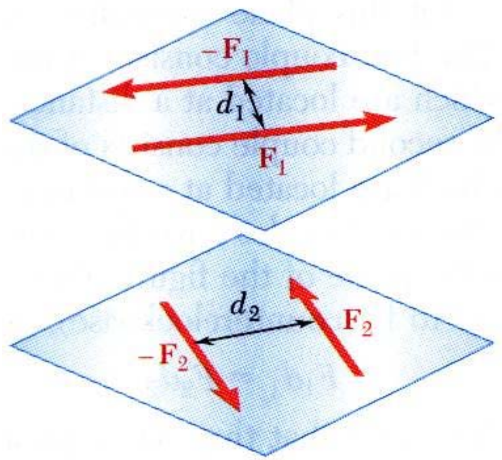


Momento de un Par

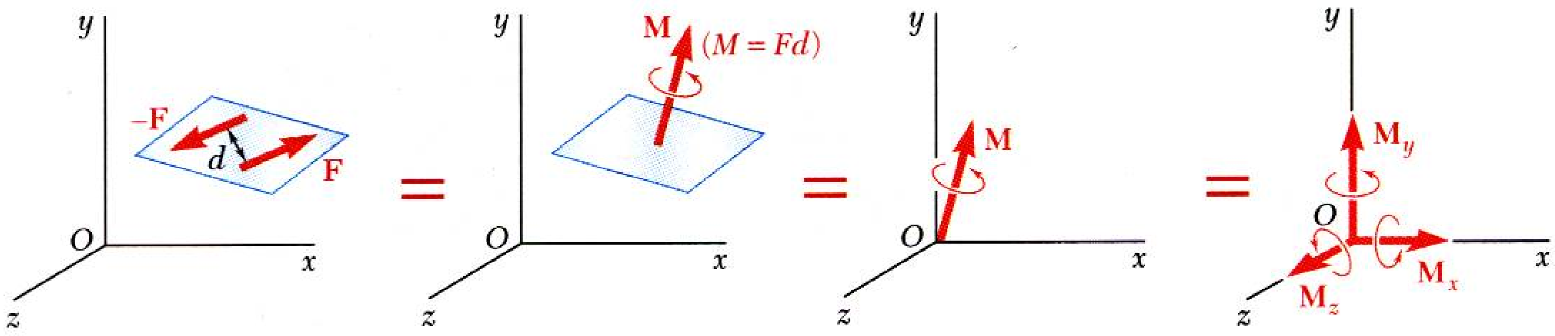
Dos pares tendrán los mismos momentos si

- $F_1 d_1 = F_2 d_2$
- los dos pares se encuentran en planos paralelos,
- los dos pares tienen el mismo sentido o la tendencia a causar la rotación en la misma dirección.





Los Pares pueden ser representados por vectores



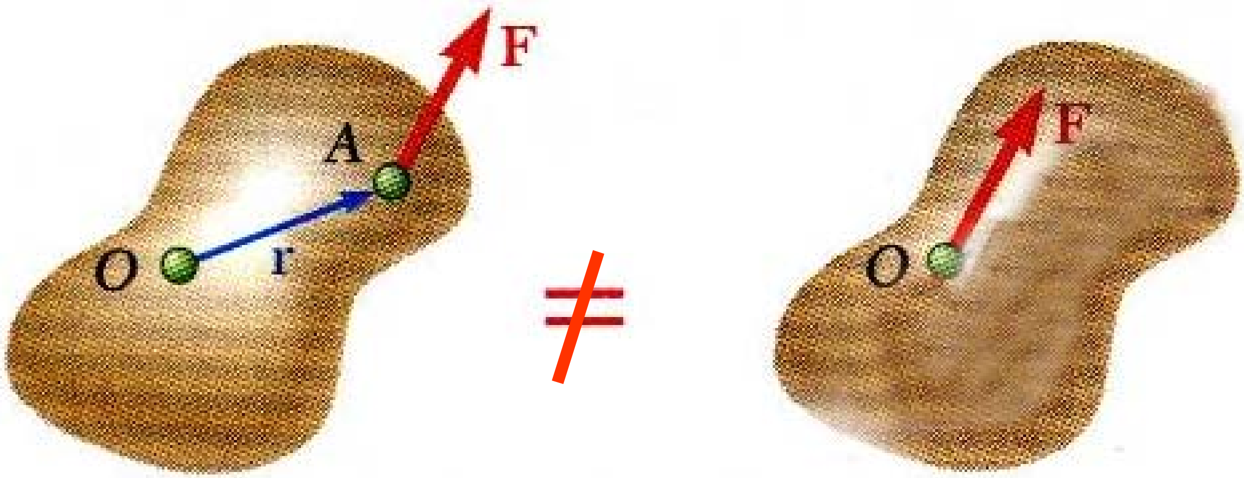
- Un par puede estar representado por un vector con magnitud y dirección igual al momento del par

- Los vectores de un par obedecen la ley de la suma de vectores.

- Un par de vectores es un vector libre, es decir, el punto de aplicación no es significativo.

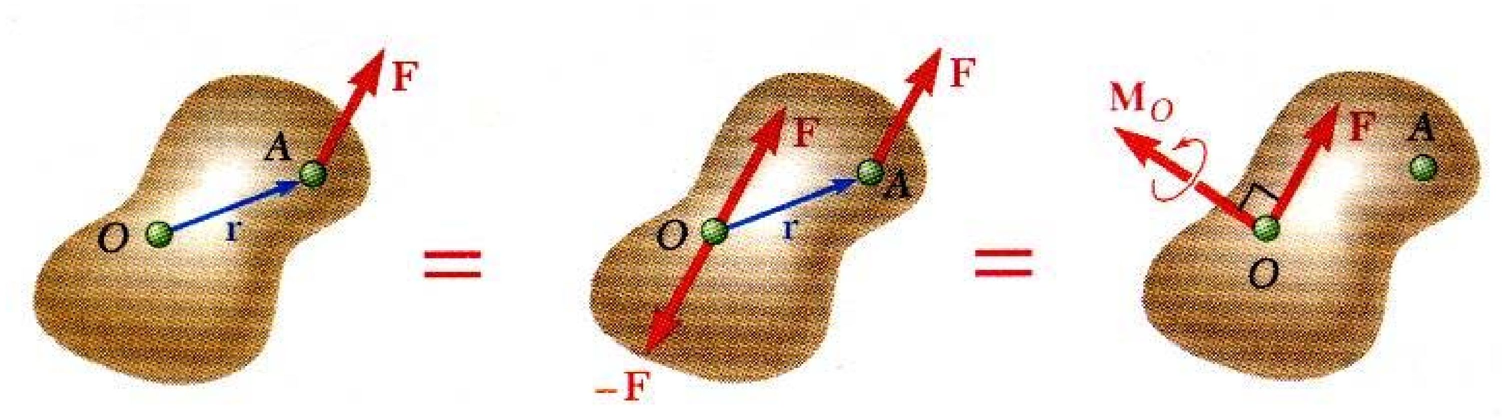
- Los pares pueden ser descompuestos en componentes.

Reducción de una fuerza, en una fuerza en *O* y un par



- El vector fuerza ***F*** no puede ser trasladado simplemente a O sin modificar su acción sobre el cuerpo.

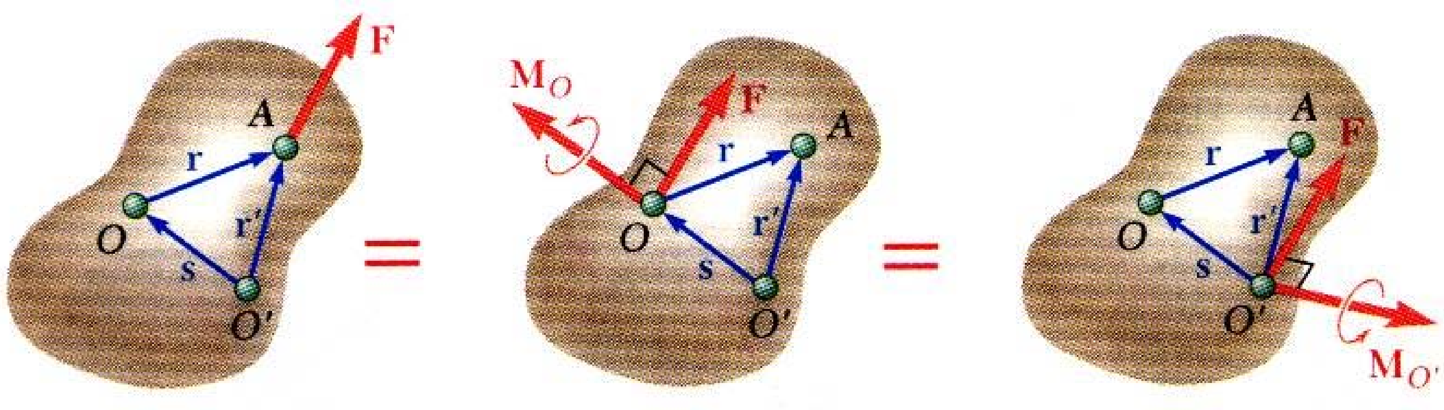
Reducción de una fuerza, en una fuerza en *O* y un par



- Colocación de vectores de fuerza igual y opuesta en O no produce ningún efecto neto sobre el cuerpo.

- Las tres fuerzas pueden ser reemplazadas por un vector de fuerza equivalente y el vector de par, es decir, un sistema fuerza-par.

Reducción de una fuerza, en una fuerza en *O* y un par



- Moviendo ***F*** desde *A* a un punto diferente *O'* requiere la adición de un par de vectores diferentes $\boldsymbol{M_{O'}}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{F}$$

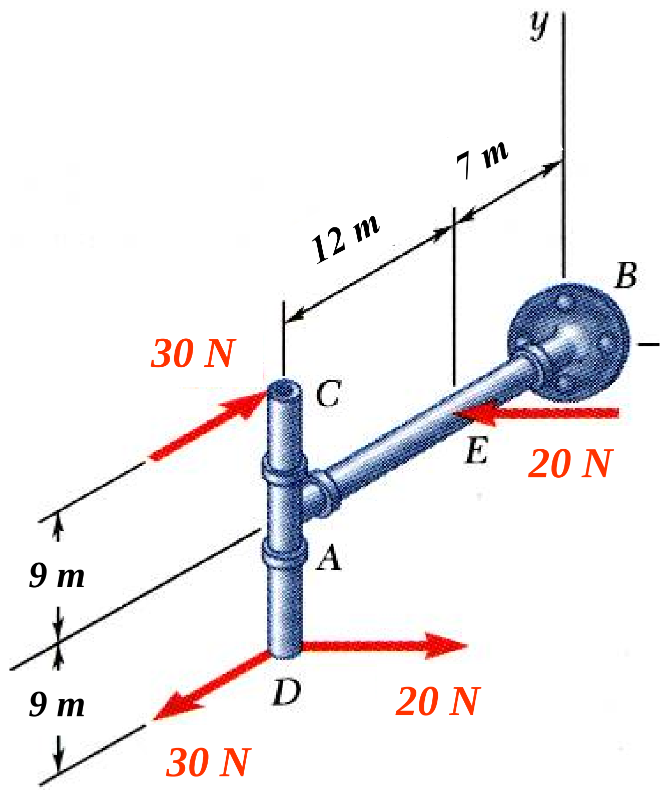
- Los momentos de ***F*** respecto O y *O'* están relacionados,

$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}\,'\times\vec{F} = (\vec{r} + \vec{s})\times\vec{F} = \vec{r}\times\vec{F} + \vec{s}\times\vec{F}$$

$$= \vec{M}_O + \vec{s}\times\vec{F}$$

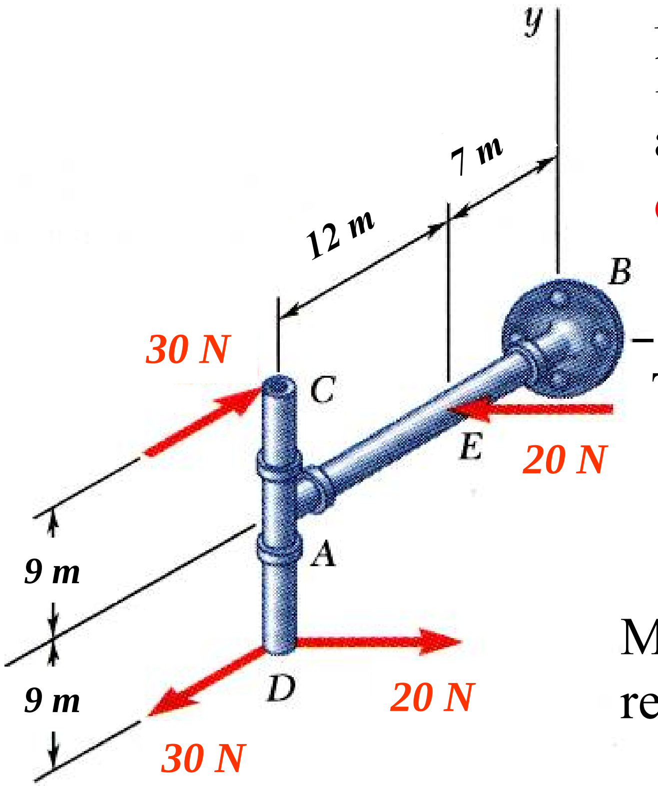
- Al mover el sistema de fuerza-par de O a O 'requiere la adición del momento de la fuerza en O respecto a O'.

Ejemplo 4.6



Determinar las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares que se muestran.

Solución ejemplo 4.6



Dado que los pares se comportan como vectores libres (no importa el punto de aplicación) vamos a tomar momentos respecto al punto D (¿por qué?)

Tomando el origen de coordenadas en el punto B

$$\vec{r}_E = 7\vec{k} \;;\; \vec{r}_C = 9\vec{j} + 19\vec{k} \;;\; \vec{r}_D = -9\vec{j} + 19\vec{k}$$

Momento de la fuerza de 20 N aplicada en E respecto al punto D

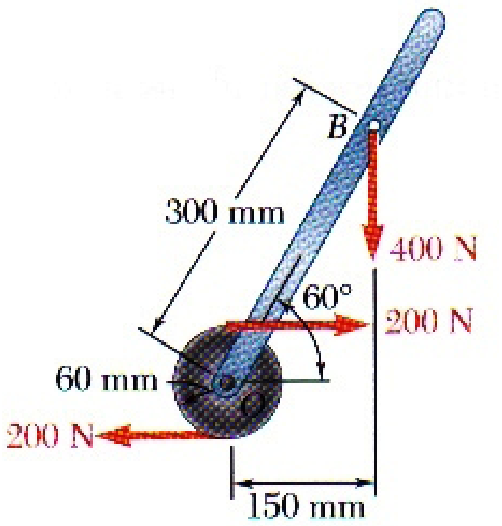
$$\vec{M}_D(20) = \vec{r}_{E/D} \times (-20\vec{i}) = \left(9\vec{j} - 12\vec{k}\right) \times (-20\vec{i}) = 240Nm\,\vec{j} + 180Nm\,\vec{k}$$

Momento de la fuerza de 30 N aplicada en C respecto al punto D

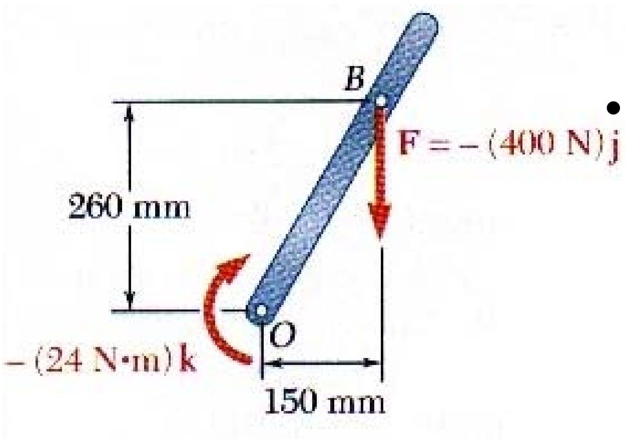
$$\vec{M}_D(30) = \vec{r}_{C/D} \times (-30\vec{k}) = \left(18\vec{j}\right) \times (-30\vec{k}) = -540Nm\,\vec{i}$$

Luego el momento resultante $\vec{M} = -540Nm\,\vec{i} + 240Nm\,\vec{j} + 180Nm\,\vec{k}$

Ejemplo 4.7



Reemplazar el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determinar la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.

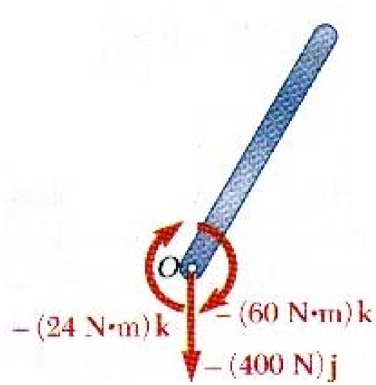


SOLUCIÓN:

• Hallamos el momento del par respecto a *O*

$$-200\cdot 0{,}12\vec{k} = -24\vec{k}\ \ (\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$$

Solución ejemplo 4.7

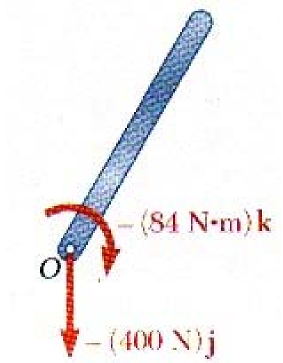


• Para trasladar la Fuerza de *B* a *O* se le añade el momento de F respecto a *O*.

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \vec{F} = (0.15\vec{i} + 0.26\vec{j}) \times (-400\vec{j}) = -60\vec{k}\ (\mathrm{N \cdot m})$$

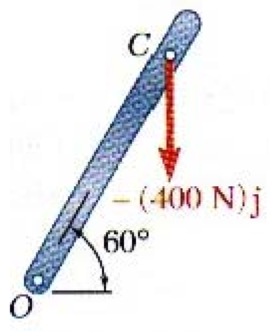
• Este momento se suma al del par de fuerzas

$$\vec{M} = -24\vec{k} - 60\vec{k} = -84\vec{k}\ (\mathrm{N \cdot m})$$



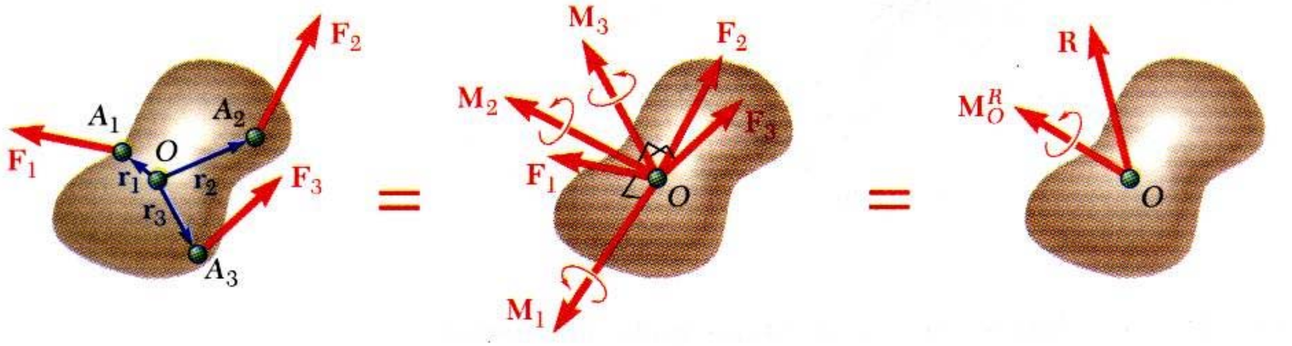
•Para hallar la distancia *d* al punto *C* de aplicación de la fuerza equivalente (que produzca el mismo momento respecto de *O*),

$$-84\vec{k} = \overrightarrow{OC} \times (-400\vec{k}) = d(\cos 60^{o}\,\vec{i} + sen60^{o}\,\vec{j}) \times (-400\vec{k})$$

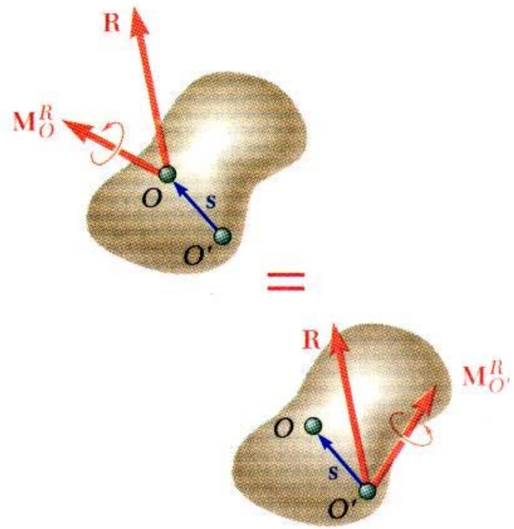


De donde *d*, $d = 420\ \mathrm{mm}$

Sistema de fuerzas: Reducción a una fuerza y un par



- Un sistema de fuerzas puede ser reemplazado por un conjunto de sistemas par de fuerzas de acción de un punto dado *O*
- La fuerza y los vectores de pares pueden ser combinado en un vector de fuerza resultante y un vector par resultante, $\vec{R} = \sum \vec{F}$ $\quad \vec{M}_O^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$
- El sistema de fuerzas de pares en O puede ser trasladado a O 'con la adición del momento de la resultante respecto a O', $\vec{M}_{O'}^R = \vec{M}_O^R + \vec{s} \times \vec{R}$



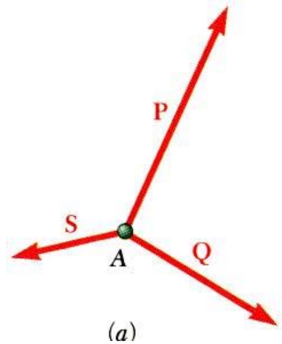
- Dos sistemas de fuerzas son equivalentes si se puede reducir al mismo sistema fuerza-par.

Sistema de fuerzas: Reducción a una fuerza y un par

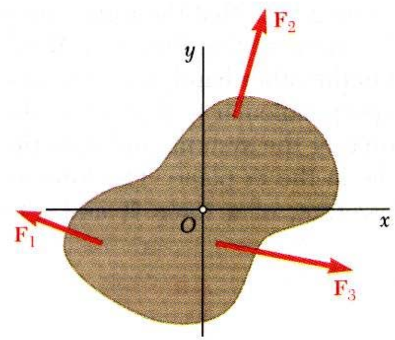
- Si la fuerza resultante y el par en *O* son mutuamente perpendiculares, se pueden sustituir por una sola fuerza actuando a lo largo de una nueva línea de acción.

- El sistema fuerza-par de un sistema de fuerzas serán perpendiculares si:

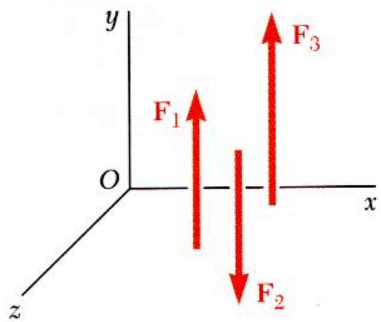
1) las fuerzas son concurrentes



2) las fuerzas son coplanarias, o



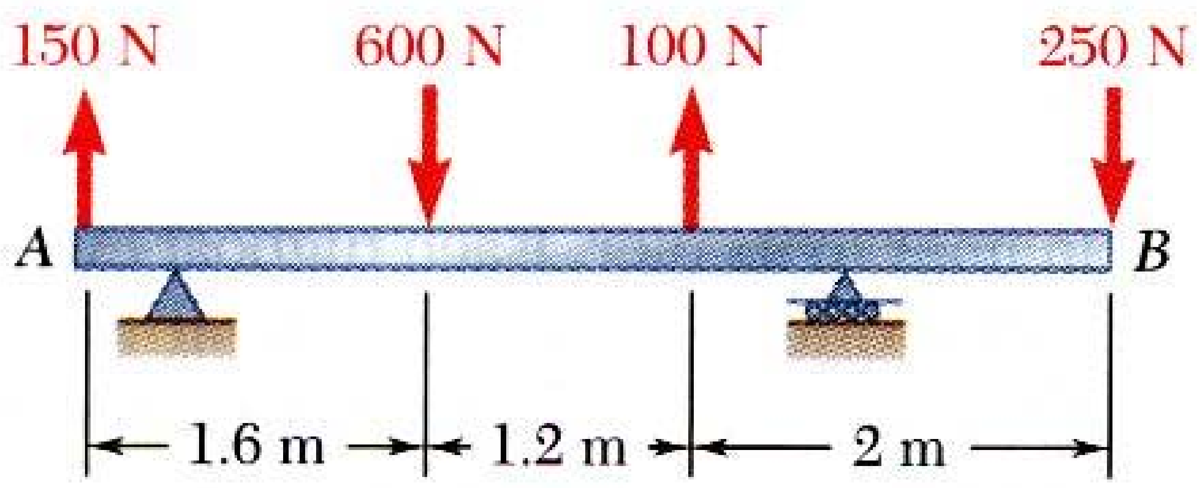
3) las fuerzas son paralelas.



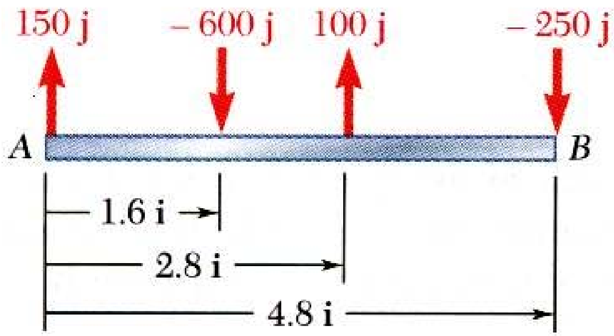
Ejemplo 4.8

Para la viga de la figura, reducir el sistema de fuerzas que se muestra a (a) un sistema equivalente fuerza-par en *A*, (b) un sistema equivalente fuerza-par en *B* y (c) una única fuerza o resultante.

Nota: Debido a que no se incluyen las reacciones de apoyo, el sistema dado no mantendrá la viga en equilibrio.



Solución ejemplo 4.8



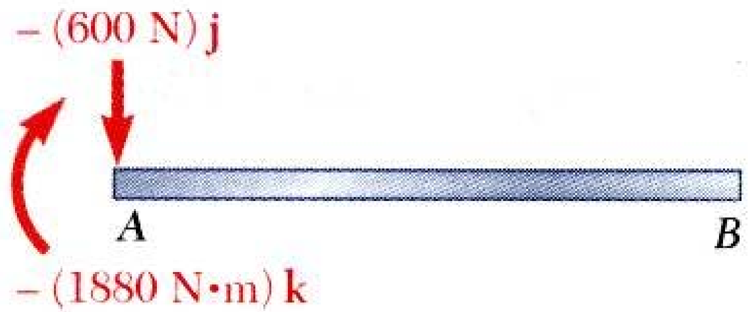
a) Calculamos la fuerza resultante y el momento resultante respecto de *A*.

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = (150\ \text{N})\,\vec{j} - (600\ \text{N})\,\vec{j} + (100\ \text{N})\,\vec{j} - (250\ \text{N})\,\vec{j}$$

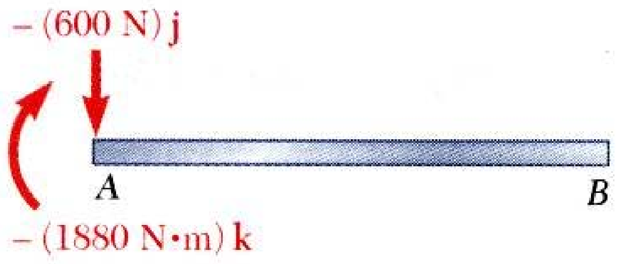
$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \text{N})\vec{j}}$$

$$\vec{M}_A^R = \sum\left(\vec{r}\times\vec{F}\right) = \left(1.6\vec{i}\right)\times\left(-600\vec{j}\right) + \left(2.8\vec{i}\right)\times\left(100\vec{j}\right) + \left(4.8\vec{i}\right)\times\left(-250\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}}$$



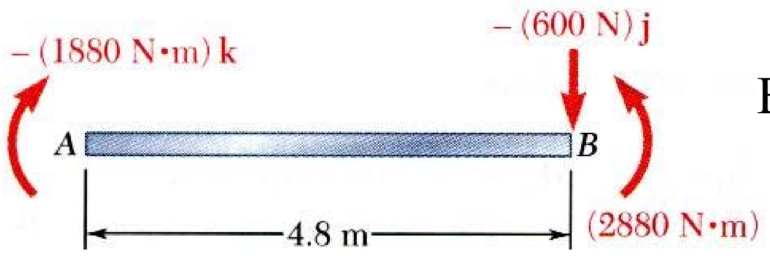
Solución ejemplo 4.8



b) Hallar el sistema fuerza-par equivalente en B a partir del calculado para el punto A.

La fuerza no varía al trasladar el sistema fuerza-par de A a B.

$$\boxed{\vec{R} = -(600\ \text{N})\vec{j}}$$



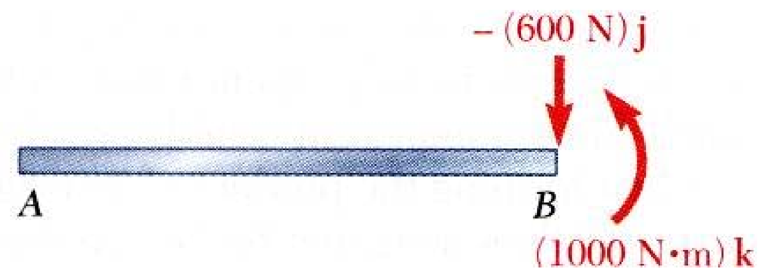
El momento en B es igual al momento respecto de B del sistema fuerza-par encontrado para A.

$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R} =$$

$$= -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k} + (-4.8\ \text{m})\vec{i} \times (-600\ \text{N})\vec{j} =$$

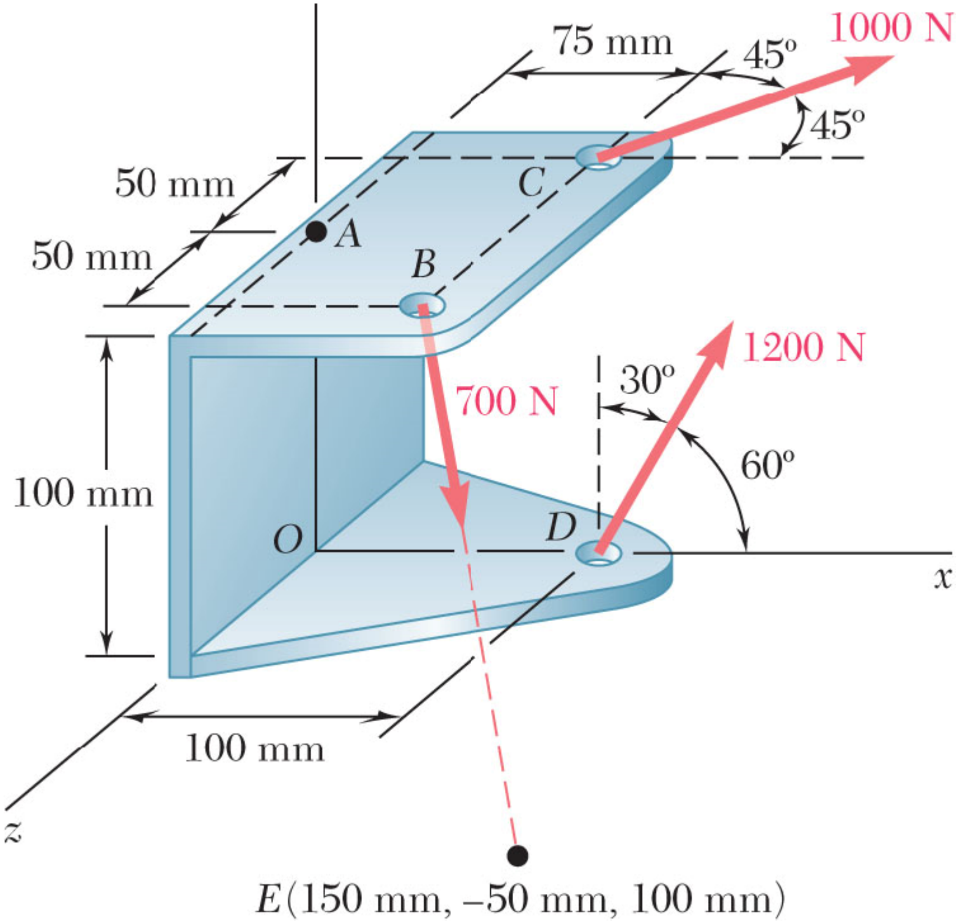
$$= -(1880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k} + (2880\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_B^R = +(1000\ \text{N}\cdot\text{m})\vec{k}}$$

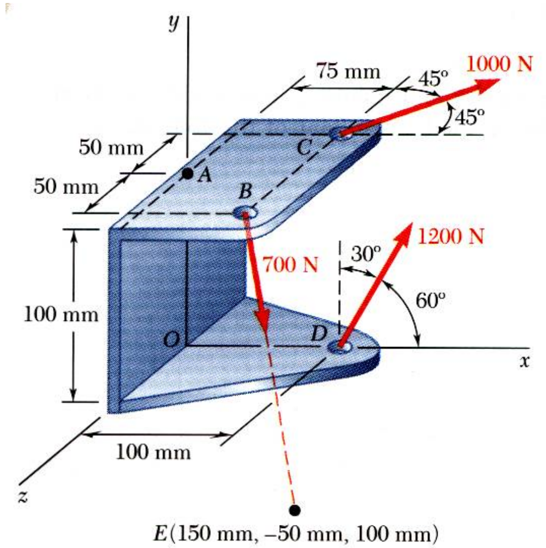


Ejemplo 4.9

Tres cables están conectados al soporte como se muestra. Reemplace las fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en A.



Solución ejemplo 4.9



1. Hallamos los vectores de posición de las fuerzas respecto a *A*.

$$\vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k}\ (\mathrm{m})$$

$$\vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k}\ (\mathrm{m})$$

$$\vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j}\ (\mathrm{m})$$

2. Descomponemos las fuerzas en sus componentes rectangulares

$$\vec{F}_B = (700\ \mathrm{N})\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{E/B}}{r_{E/B}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k}\ \ (\mathrm{N})$$

$$\vec{F}_C = (1000\ \mathrm{N})\left(\cos 45\vec{i} - \cos 45\vec{j}\right)$$
$$= 707\vec{i} - 707\vec{j}\ \ (\mathrm{N})$$

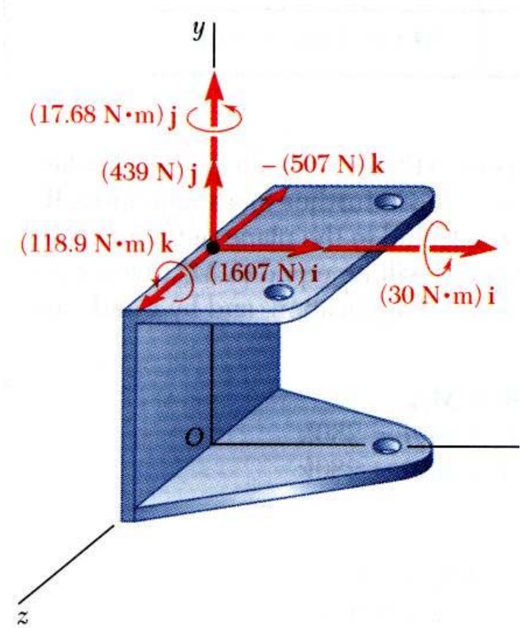
$$\vec{F}_D = (1200\ \mathrm{N})\left(\cos 60\vec{i} + \cos 30\vec{j}\right)$$
$$= 600\vec{i} + 1039\vec{j}\ \ (\mathrm{N})$$

Solución ejemplo 4.9

3. Hallamos la fuerza equivalente,

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = (300 + 707 + 600)\vec{i} + (-600 + 1039)\vec{j} + (200 - 707)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \ \ (\text{N})}$$



4. Hallamos el par equivalente,

$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

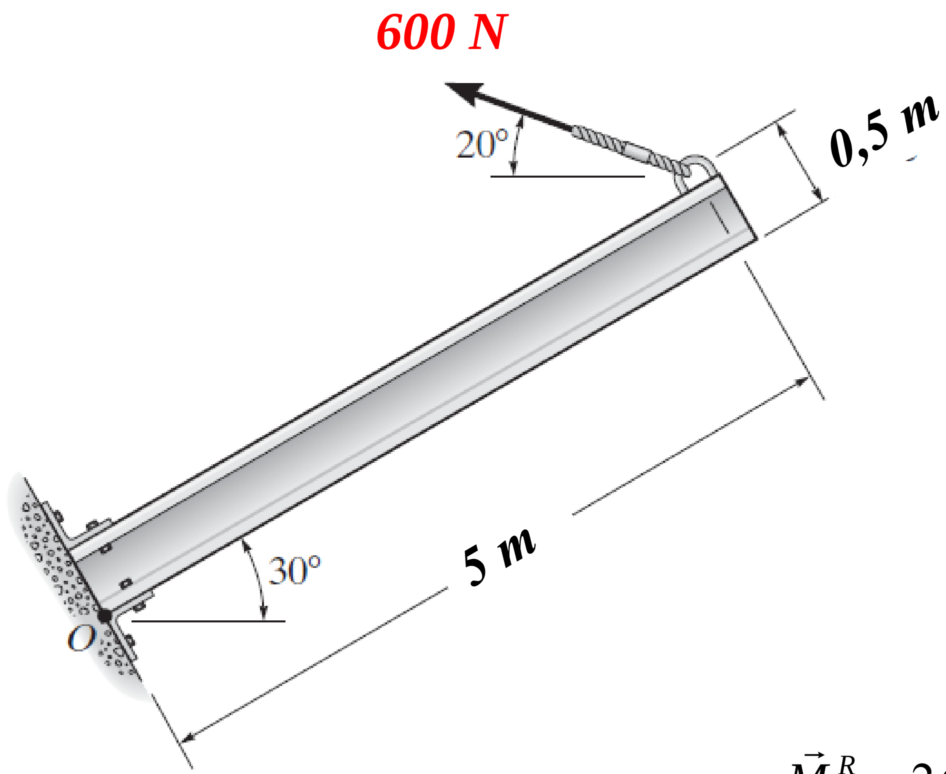
$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}}$$

Problema propuesto 4.1

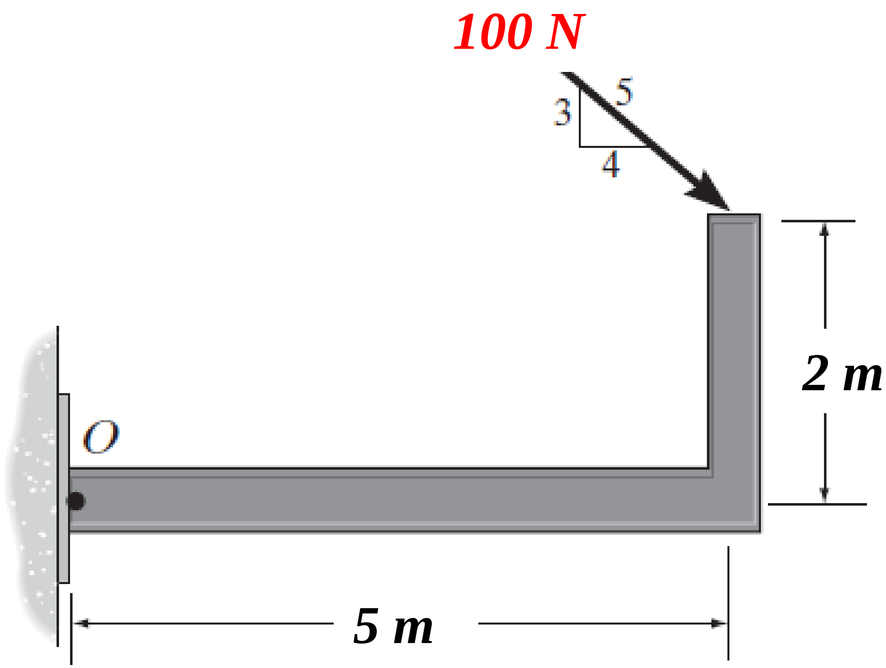
Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O.



$$\vec{M}_O^R = 2491\ Nm\ \vec{k}$$

Problema propuesto 4.2

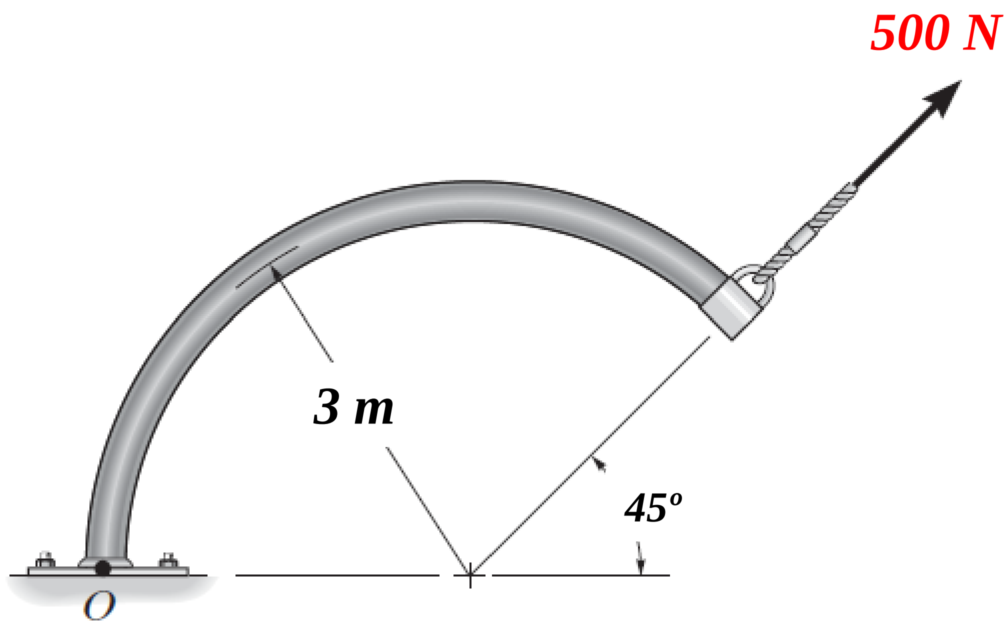
Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O.



$$\vec{M}_O^R = -460\ Nm\ \vec{k}$$

Problema propuesto 4.3

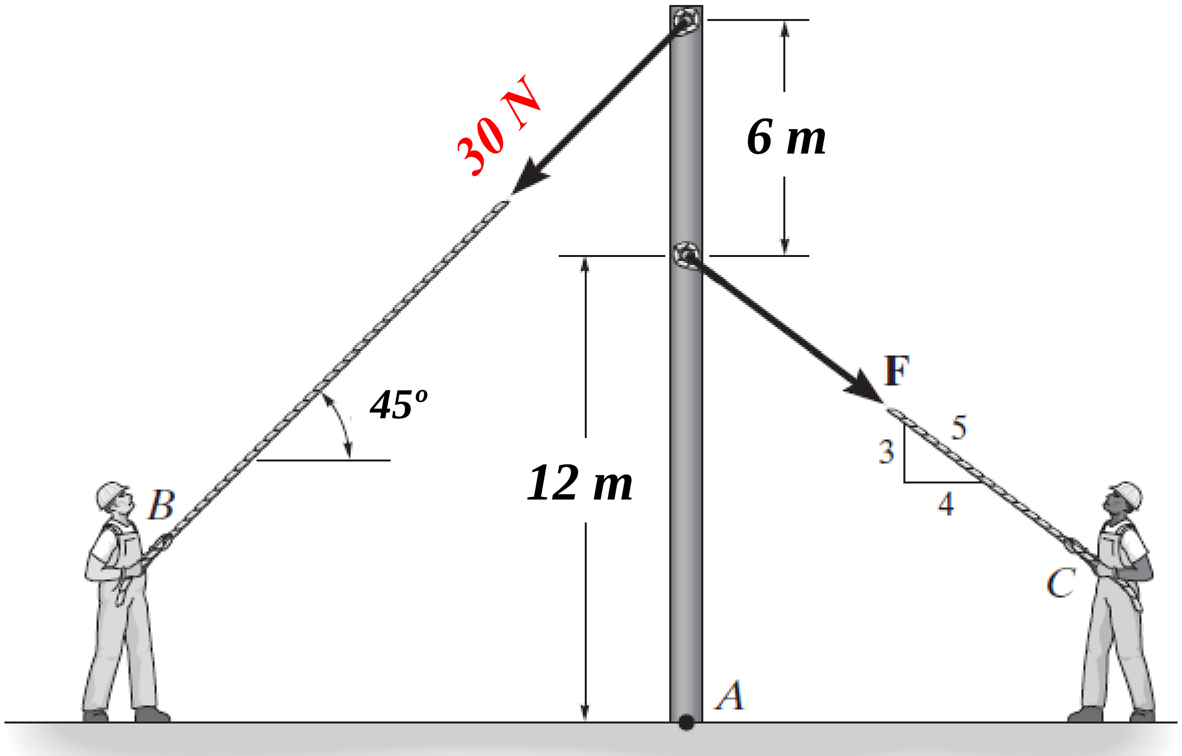
Determine el momento de la fuerza con respecto al punto O.



$$\vec{M}_O^R = 1{,}06 \text{ kNm } \vec{k}$$

Problema propuesto 4.4

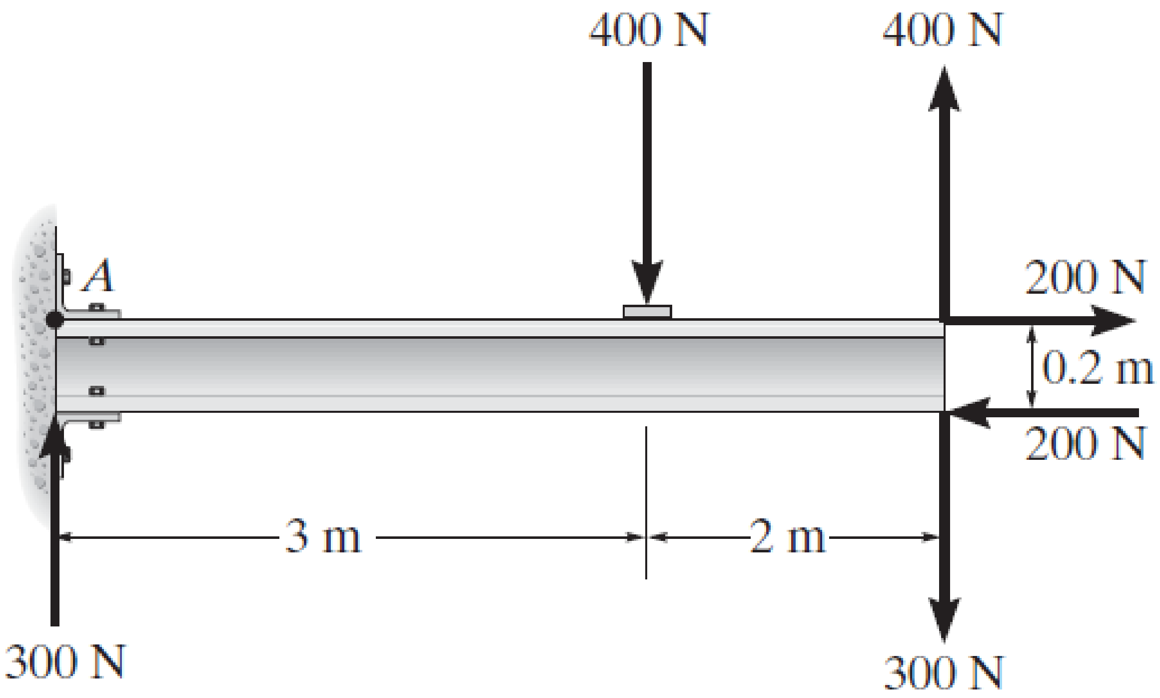
Si el hombre en *B* ejerce una fuerza de *P=30 N* sobre su cuerda, determine la magnitud de la fuerza **F** que el hombre en *C* debe ejercer para evitar que el poste gire, es decir, de manera que el momento resultante de ambas fuerzas con respecto a *A* sea cero.



$$F = 40N$$

Problema propuesto 4.5

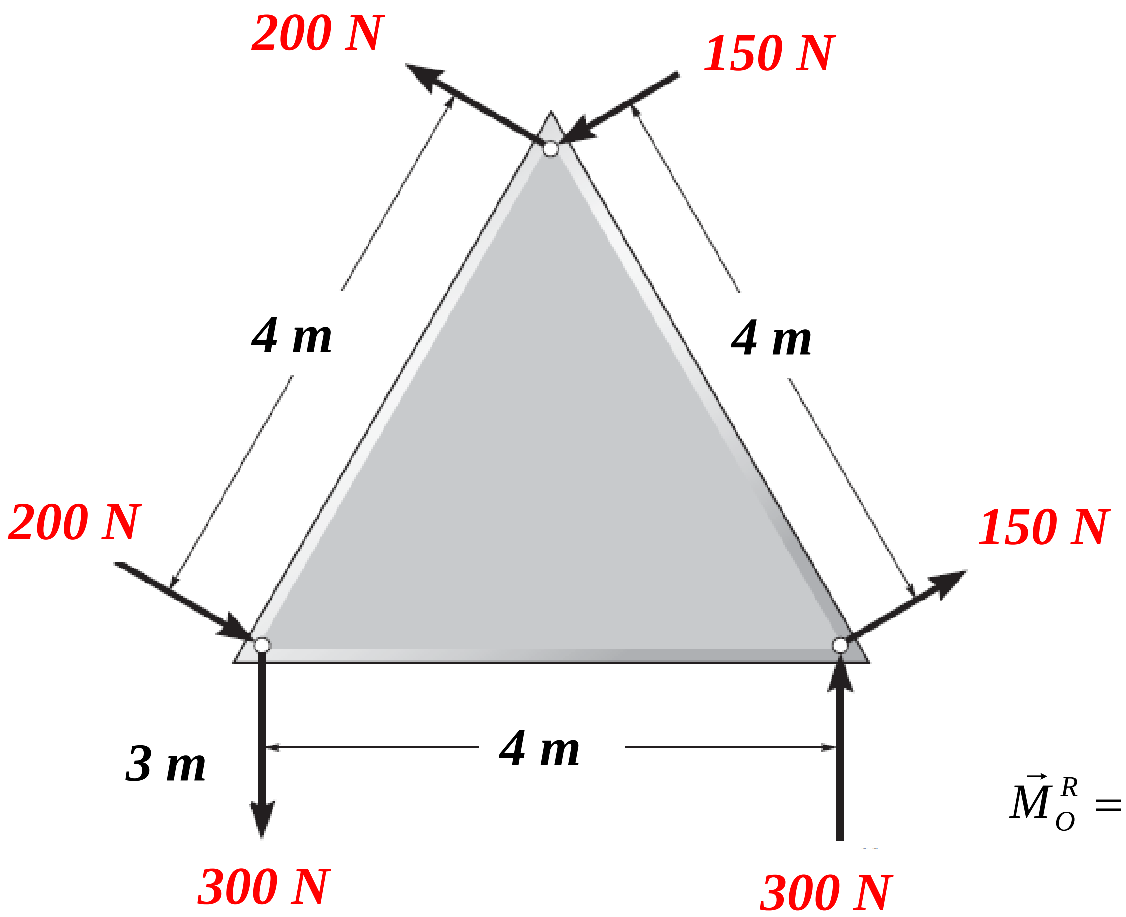
Determine el momento de par resultante que actúa sobre la viga.



$$\vec{M}_R = -740\,Nm\vec{k}$$

Problema propuesto 4.6

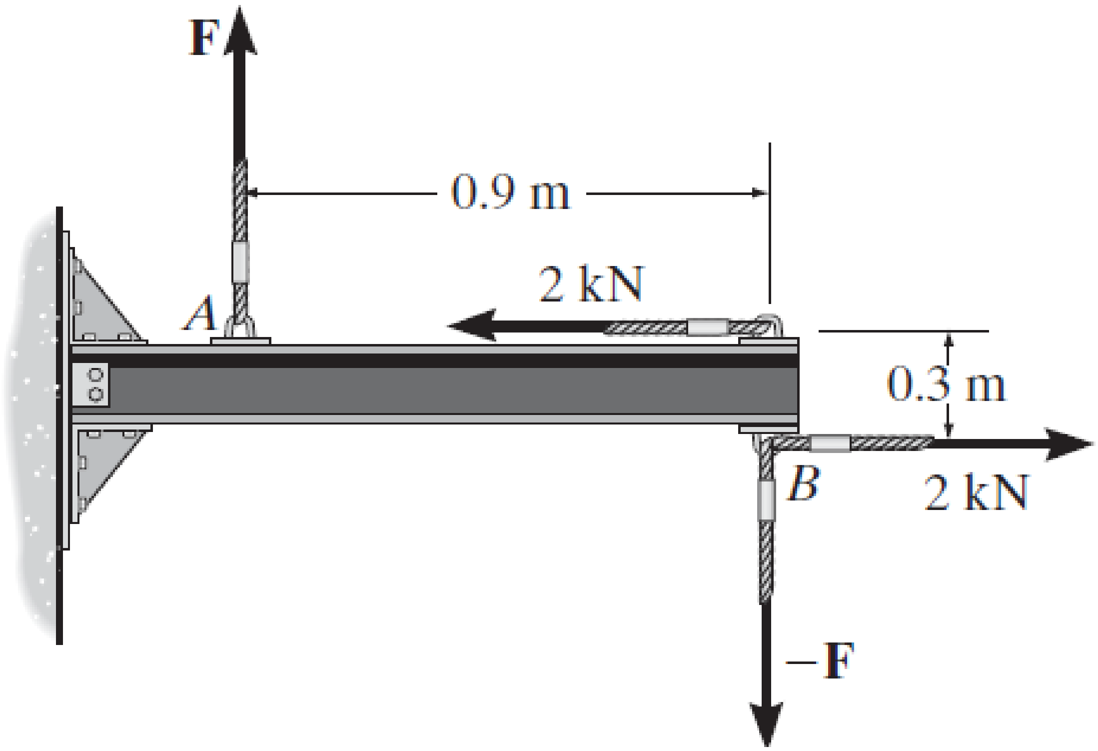
Determine el momento de par resultante que actúa sobre la placa triangular.



$$\vec{M}_O^R = -2600\ Nm\ \vec{k}$$

Problema propuesto 4.7

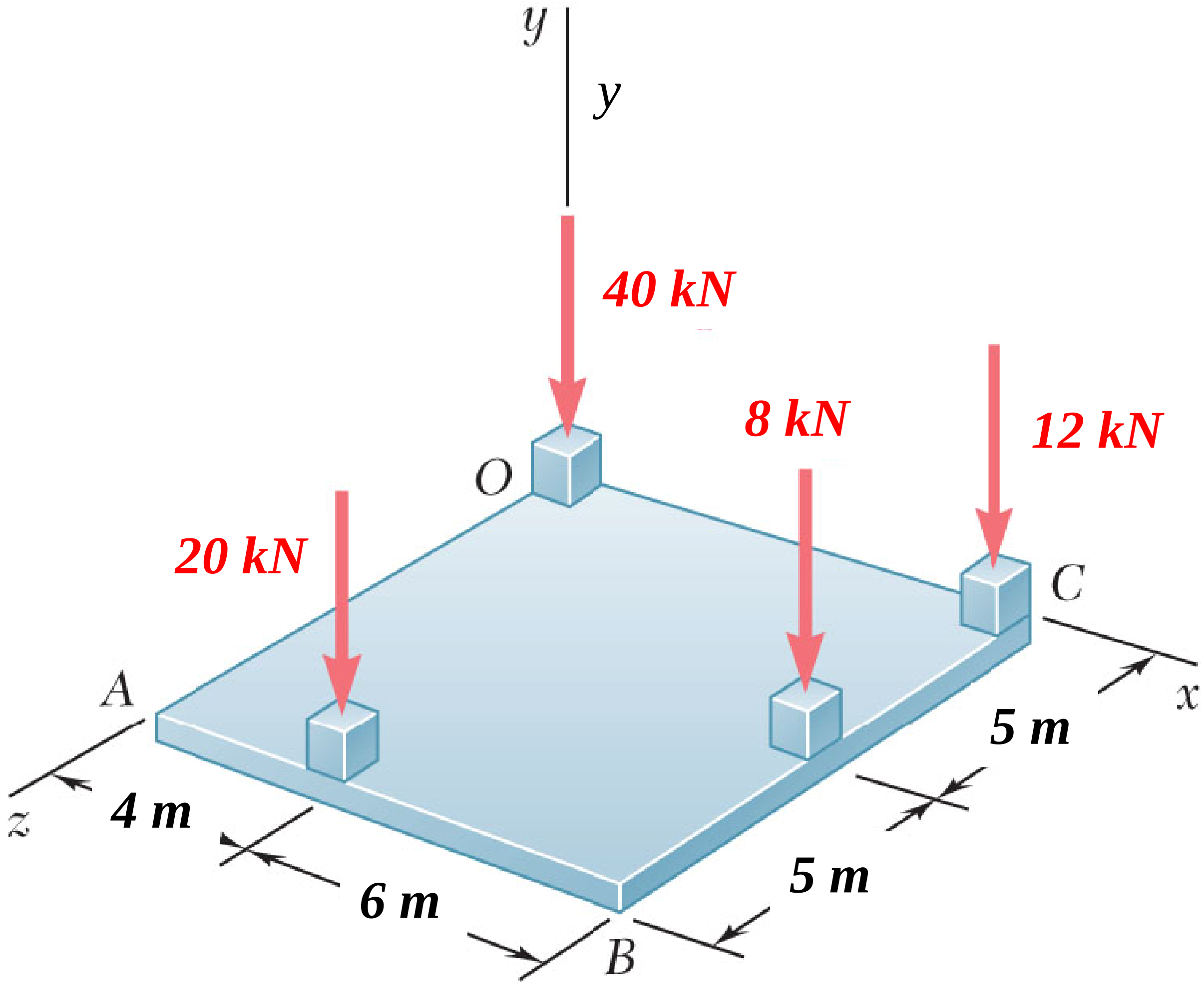
Determine la magnitud de **F** de modo que el momento de par resultante que actúa sobre la viga sea de1,5 kN m en el sentido de las manecillas del reloj.



$F = 2,33\ kN$

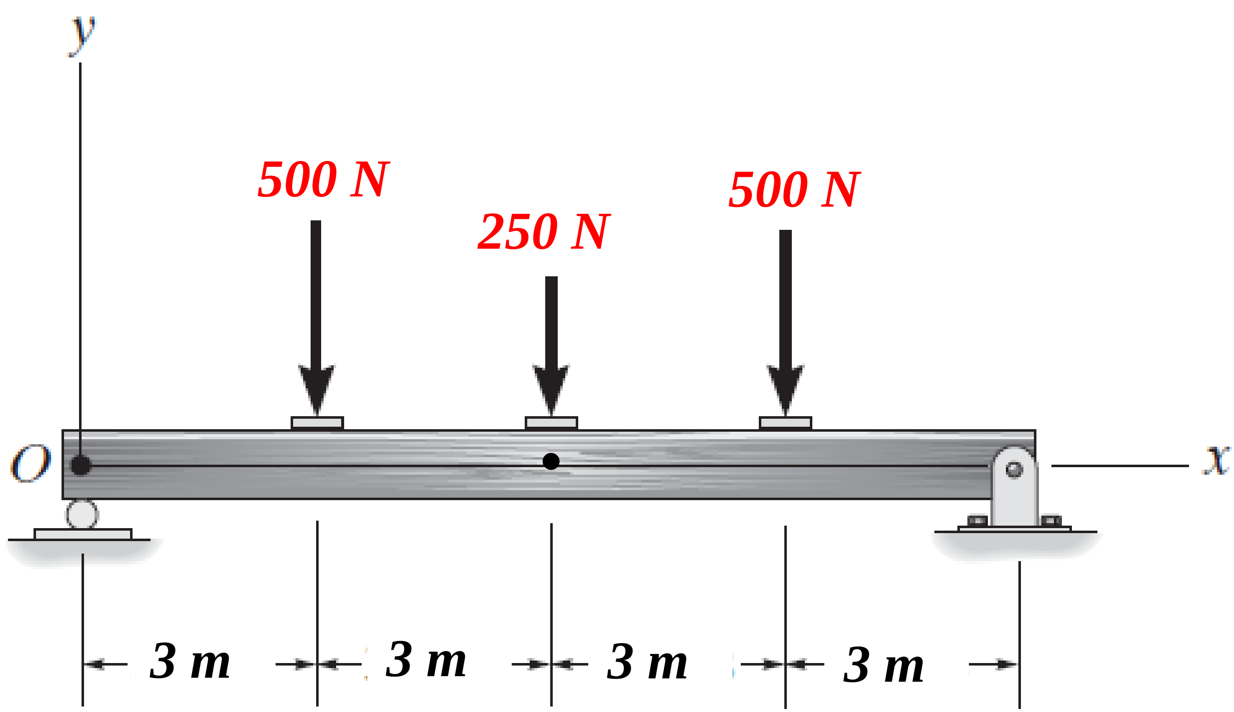
Problema propuesto 4.8

Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas



Problema propuesto 4.9

Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde *O*, donde la línea de acción de la resultante interseca a la viga.

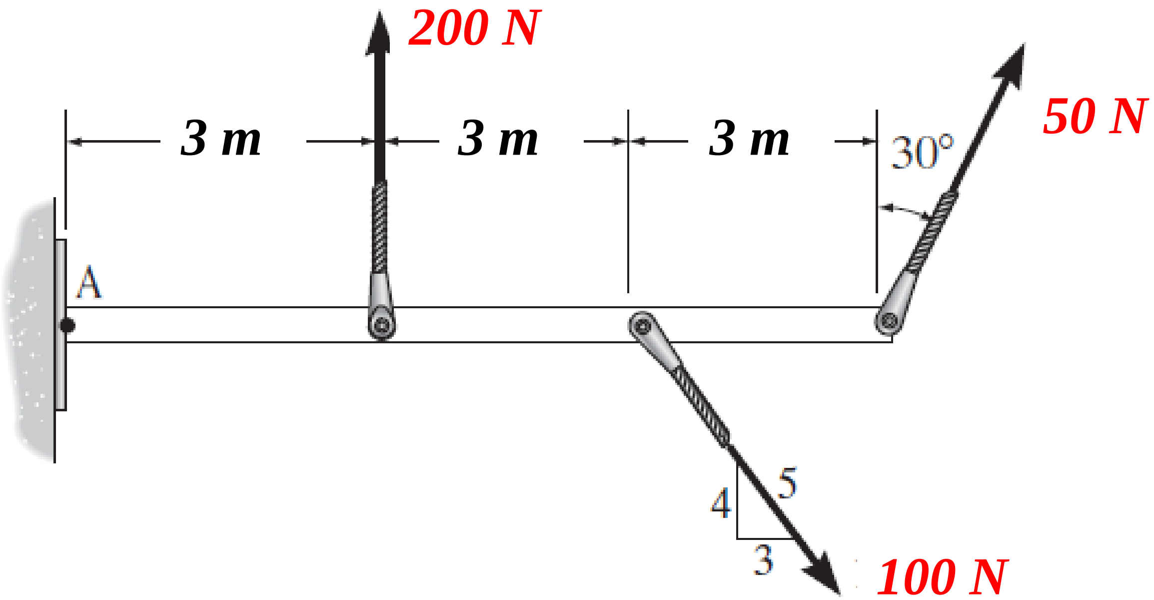


$$\vec{R} = -1250\ N\ \vec{j}\ ;\ \vec{M}_O^R = -7500\ Nm\ \vec{k}$$

A 6 m a la derecha de O

Problema propuesto 4.10

Reemplace el sistema de cargas por una fuerza resultante equivalente y especifique el punto, medido desde *A*, donde la línea de acción de la resultante interseca al elemento.

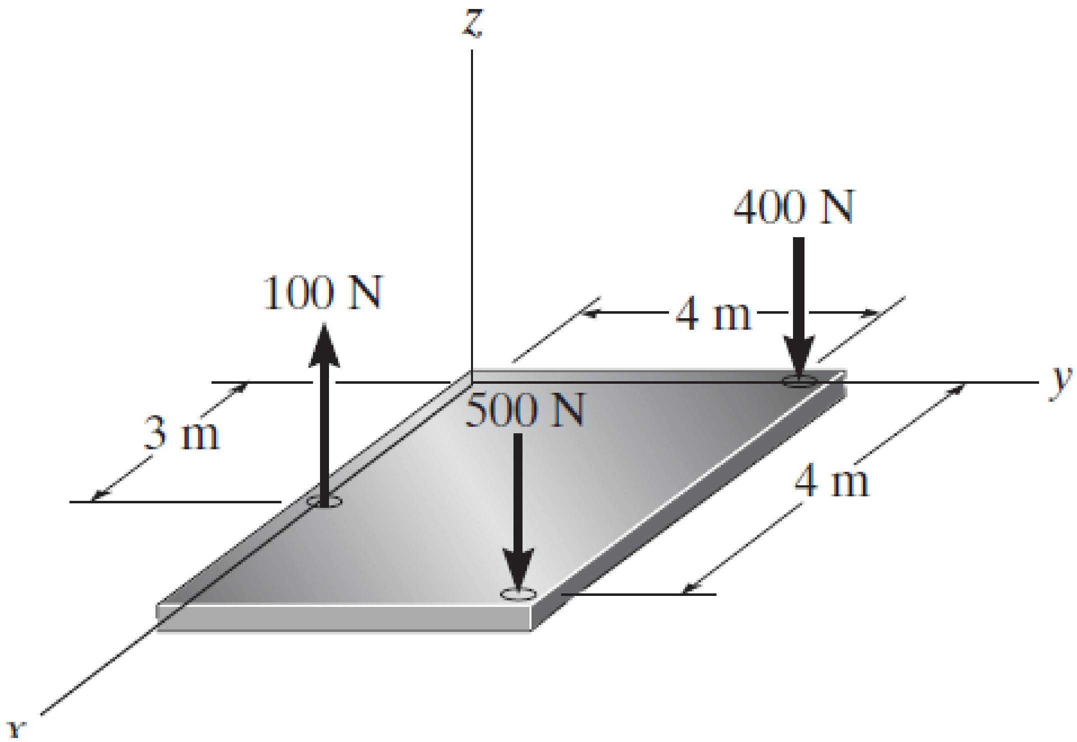


$$\vec{R} = 85\ N\ \vec{i} + 163{,}3\ N\ \vec{j}\ ;\ \vec{M}_O^R = 509{,}5\ Nm\ \vec{k}$$

$$d = 3{,}12m$$

Problema propuesto 4.11

Reemplace las cargas mostradas por una sola fuerza resultante equivalente y especifique las coordenadas *x* y *y* de su línea de acción.



$$\vec{R} = -800\ N\ \vec{k}$$

$$x = 2{,}125\ m\ \ ;\ \ y = 4{,}50\ m$$