UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

Segundo parcial FÍSICA I

Examen segundo parcial

(15 de diciembre de 2015)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Escriba la expresión matemática que permite calcular el momento de inercia de una figura plana respecto al eje x (I_x). Aplique dicha expresión para calcular dicho momento de inercia del rectángulo de la figura.

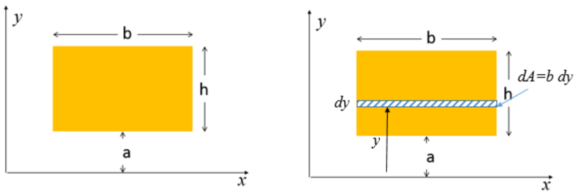

Figura 1: *Área rectangular de lados b* y *h*

Solución:

$$I_x = \int y^2 dA \tag{1}$$

en donde y es la distancia del elemento infinitesimal de área $dA = b\,dy$ al eje x y la integral se extiende a toda el área de la figura. En nuestro caso:

$$I_x = \int_a^{a+h} y^2 b\,dy = b\int_a^{a+h} y^2\,dy = \frac{b}{3}\left[y^3\right]_a^{a+h} = \frac{1}{3}bh^3 + ba^2h + bah^2 \tag{2}$$

2.- Sabiendo que el momento de inercia I_x de un triángulo equilátero de lado b y altura h respecto a un eje x que pasa por su centro viene dado por: $I_x = \frac{1}{36}bh^3$, calcule mediante el teorema de Steiner el momento de inercia $I_{x'}$ de un triángulo equilátero de 10 cm de lado, respecto de un eje x' que pasa por la base de dicho triángulo.

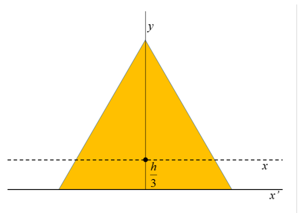

Figura 2: *Triángulo equilátero de lado b*

Solución:

$$I_{x'} = I_x + \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{36}bh^3 + \frac{1}{18}bh^3 = \frac{1}{12}bh^3 \tag{3}$$

teniendo en cuenta que $b = 10\,cm$ y que $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}\,cm$, sustituyendo estos valores en la ecuación (3) se tiene:

$$I_x = \frac{1}{12} 10 \times 75^{\frac{3}{2}} = 541\,cm^4$$

3.- Explique la diferencia entre presión absoluta, y presión manométrica. Una forma sencilla de medir la presión es mediante un manómetro de tubo abierto que consiste en un tubo en forma de U que contiene un líquido (muchas veces agua o mercurio). El manómetro de la figura contiene agua, si la altura h es igual a $150\,mm$. ¿cuál es la presión manométrica en el interior del recinto?

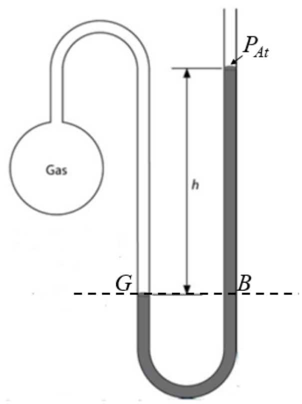

Figura 3: *Manómetro de tubo abierto*

Solución:

La presión manométrica es la diferencia entre la presión absoluta y la presión atmosférica. En el manómetro de la figura se tiene que la presión en el punto G es igual que la presión en el punto B, dado que se encuentran en la misma horizontal. La presión en el punto B es debida a la presión atmosférica P_{At} más la presión hidróstática ejercida por la columna de agua cuya altura es h , por consiguiente la presión absoluta en G (la del gas) :

$$P_G = P_B = P_{At} + \rho g h \tag{4}$$

y por tanto, la presión manométrica es:

$$P_{At} + \rho g h - P_{At} = \rho g h = 1000 \times 9,8 \times 0,150 = 1470\,Pa \tag{5}$$

4.- Como sin duda Vd. conoce el «principio» de Arquímedes, no le será difícil contestar de forma razonada, a las siguientes cuestiones. Si dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua **a)** ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza de flotación? **b)** ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre? **c)** ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior? **d)** ¿Para cuál de ellos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

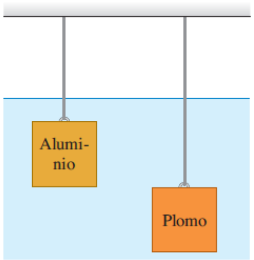

Figura 4: *Cuestión 4*

Solución:

a) Dado que los dos cubos son del mismo tamaño, desalojan el mismo volumen de agua; como el empuje es igual al peso de fluido desalojado (en este caso agua), los dos cubos experimentan el mismo empuje.

b) Al ser la densidad del plomo mayor que la del aluminio, el peso del cubo de plomo es mayor que el del aluminio, y al ser igual el empuje, la tensión del alambre que sostiene al cubo de plomo es mayor.

c) La cara inferior del cubo de plomo está a mayor profundidad; por consiguiente la presión es mayor y por tanto también lo será la fuerza ejercida sobre esa cara.

d) La diferencia de presiones entre dos puntos depende de la diferencia de alturas, en este caso el lado del cubo, igual para los dos, luego la diferencia de presión es idéntica para cada caso.

5.-a) Escriba las expresiones que permiten calcular la energía térmica intercambiada por un cuerpo de masa m, cuando varía su temperatura $\triangle T$, y cuando realiza un cambio de fase («estado»). b) Aplique las expresiones anteriores para calcular el calor que es necesario aplicar a $25\,g$ de hielo a $-20\,^{o}C$, para convertirlo en agua a 30 ºC.

Datos: Calor específico del hielo $c_{hielo} = 2114\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, Calor específico del agua $c_{agua} = 4180\,J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$, Calor latente de fusión $L = 334 \cdot 10^3\,J \cdot kg^{-1}$

Solución:

La cantidad de calor en cada uno de los casos viene dada por:

$$Q = mc_e \triangle T; \quad Q = mL \tag{6}$$

en donde c_e es el calor específico del cuerpo y L es el calor latente del cambio de estado.

Cuando se pasa hielo a $-20\,^{o}$C a agua líquida a 30 ºC, hay que realizar tres procesos: 1) pasar de hielo a $-20\,^{o}$C a hielo a 0 ºC. 2) Pasar de hielo a 0 ºC. a agua líquida a 0 ºC., 3) De agua a 0 ºC a agua a 30 ºC.

$$Q = 0,025 \times 2114 \times (0 - (-20)) + 0,025 \times 334 \cdot 10^3 + 0,025 \times 4180 \times (30 - 0) = 12542\,J$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1.- Calcule el centroide de la figura

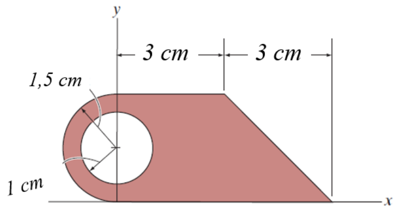

Figura 5: *Área compuesta*

Solución:

De la figura se observa que puede descomponerse en cuatro figuras: un cuadrado de lado $3\,cm$ un triángulo de $3\,cm$ de base y $3\,cm$ de alto, un semicirculo de radio $1,5\,cm$ y el agujero por un círculo de radio $1\,cm$ cuya área consideraremos negativa. Construimos el siguiente cuadro:

	A_i (cm^2)	x_i (cm)	y_i (cm)	A_ix_i (cm^3)	A_iy_i (cm^3)
	9	1,5	1,5	13,5	13,5
	4,5	4	1	18	4,5
	0,64	-0,64	1,5	-2,25	5,29
	-3,14	0	1,5	0	-4,71
$\sum$	13,89			29,25	18,58

Figura 6: *Cuadro para la determinación del centroide*

luego:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{29,25}{13,89} = 2,11\,cm$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{18,59}{13,89} = 1,34\,cm$$

Problema 2.- Calcular el área y la posición del centroide de la figura 5.

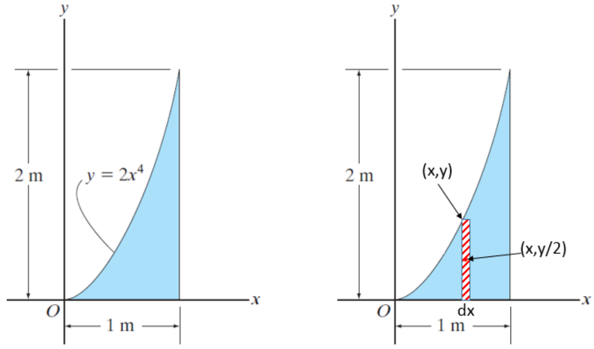

Figura 7: *Problema 2*

Solución:

Para calcular el área, descomponemos la figura en rectángulos infinitesimales de altura y y espesor dx y por consiguiente $dA = y\,dx$, entonces:

$$A = \int_0^1 y\,dx = \int_0^1 2x^4\,dx = \left[\frac{2}{5}x^5\right]_0^1 = 0,4\,m^2 \tag{7}$$

las coordenadas del centroide (centro de gravedad) vienen dadas por

$$\bar{X} = \frac{\int_0^1 xy\,dx}{A} = \frac{\int_0^1 2x^5\,dx}{A} = \frac{\left[\frac{2}{6}x^6\right]_0^1}{0,4} = \frac{5}{6} = 0,83\,m \tag{8}$$

$$\bar{Y} = \frac{\int_0^1 \frac{y}{2}y\,dx}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\,dx}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 4x^8\,dx}{A} = \frac{\left[\frac{2}{9}x^9\right]_0^1}{0,4} = \frac{5}{9} = 0,56\,m \tag{9}$$

Problema 3.- a) Determine los momentos de inercia I_x;I_y y el producto de inercia I_{xy} para el área de la sección transversal de la viga con respecto a los ejes centroidales x, y. b) Mediante el círculo de Mhor obtenga los momentos principales de inercia, así como los ejes principales de inercia.

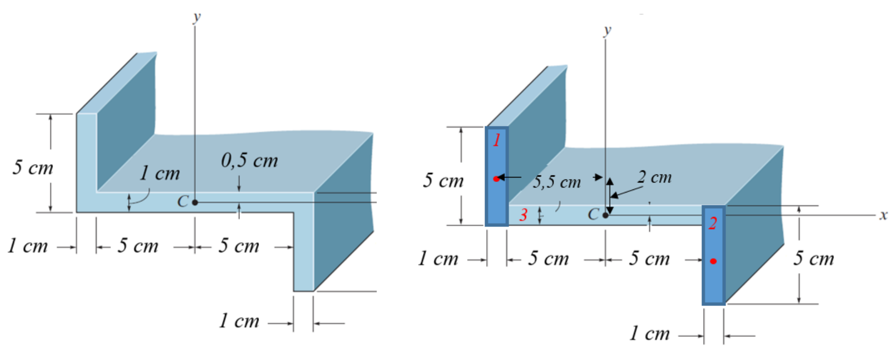

Figura 8: *Problema 3*

Solución:

La sección transversal de la viga se ha dividido en tres areas rectangulares, las secciones 1 y 2 tienen un área de $5\,cm^2$y sus centros distan $-5,5\,cm$, $2\,cm$, $5,5\,cm$, $-2\,cm$ respectivamente del centroide C de la sección transversal completa. De la simetría de la figura, los momentos de inercia y producto de inercia de las secciones 1 y 2 son iguales:

$$I_x(1) = I_x(2) = \frac{1}{12}5^3 \times 1 + 5 \times 2^2\,cm^4 \tag{10}$$

$$I_y(1) = I_y(2) = \frac{1}{12}1^3 \times 5 + 5 \times 5,5^2\,cm^4 \tag{11}$$

$$I_{xy}(1) = 0 + 5 \times (-5,5) \times 2\,cm^4 \tag{12}$$

$$I_{xy}(2) = 0 + 5 \times 5,5 \times (-2)\,cm^4 \tag{13}$$

$$I_x(3) = \frac{1}{12}1^3 \times 10\,cm^4 \tag{14}$$

$$I_y(3) = \frac{1}{12}10^3 \times 1\,cm^4 \tag{15}$$

$$I_{xy}(3) = 0 \tag{16}$$

se ha tenido en cuenta que los productos de inercia con respecto a los ejes que pasan por los centros de gravedad de las distintas secciones son cero, dado que son secciones simétricas; así mismo se ha aplicado el teorema de Steiner para las secciones 1 y 2.

El producto de inercia total así como los momentos de inercia, es la suma de los productos y momentos de las respectivas secciones:

$$I_x(total) = I_x(1) + I_x(2) + I_x(3) = 62\,cm^4 \tag{17}$$

$$I_y(total) = I_y(1) + I_y(2) + I_y(3) = 387\,cm^4 \tag{18}$$

$$I_{xy}(total) = I_{xy}(1) + I_{xy}(2) + 0 = -110\,cm^4 \tag{19}$$

Con los resultados de las ecuaciones (17),(18) y (19) construimos el círculo de Mhor

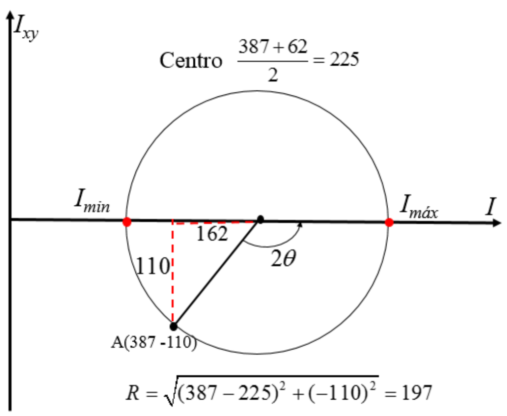

Figura 9: *Círculo de Mhor*

De la figura 9 , se deduce:

$$I(máx) = 225 + 197 = 422\,cm^4\,;\, I(mín) = 225 - 197 = 28\,cm^4 \tag{20}$$

$$2\theta = 180 - arctan\frac{110}{163} \Longrightarrow \theta = 73^o \tag{21}$$

en la figura 10 se muestra la localización de los ejes principales de inercia

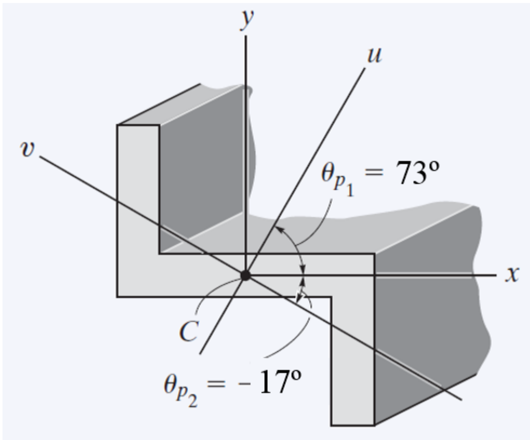

Figura 10: *Ejes principales de inercia*

Problema 4.- De un gran depósito de agua (***la superficie del depósito es mucho mayor que la sección*** S_A), cuyo nivel se mantiene constante fluye agua que circula por los conductos de la figura hasta salir por la abertura D, que está abierta al aire. La diferencia de presión entre los puntos A y B es $P_B - P_A$=1500 Pa. Sabiendo que las secciones de los diferentes tramos de la conducción son $S_A = S_C = 10\,cm^2$ y $S_B = 40\,cm^2$, calcular: a) las velocidades. b) las presiones del agua en los puntos A, B, de la conducción. La presión en D es la atmosférica, igual a $10^5\,Pa$,

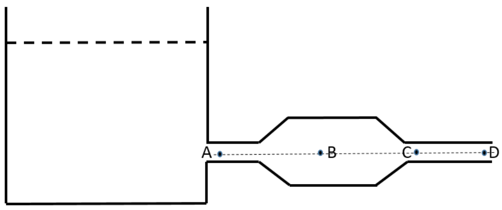

Figura 11: *Gran depósito de agua*

Solución:

Los puntosA, C *y* D al estar en la misma horizontal y presentar la misma sección se verifica que

$$v_A = v_C = v_D \tag{22}$$

consecuencia de la ecuación de continuidad $vS = cte$, y teniendo en cuenta la ecuación de Bernoulli

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = cte \tag{23}$$

se deduce que las presiones en dichos puntos A, C y D son idénticas:

$$P_A = P_C = P_D = P_{atn} = 10^5 Pa \tag{24}$$

de la ecuación de continuidad entre el punto A y B

$$v_A 10 = v_B 40 \Longrightarrow v_A = 4v_B \tag{25}$$

mediante la ecuación de Bernoulli entre los dos mismos puntos

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \Longrightarrow P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) \tag{26}$$

de la ecuación (25) y como la diferencia de presiones entre los puntos A y B es de $1500\,Pa$ (dato del problema)

$$1500 = 500(16v_B^2 - v_B^2) \Longrightarrow v_B = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,45\,ms^{-1} \tag{27}$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (22) y (25)

$$v_A = v_C = v_D = 4v_B = 1,80\,ms^{-1}$$

$$P_B - P_A = 1500\,Pa \Longrightarrow P_B = P_A + 1500 = 1,015 \times 10^5 Pa$$

Problema 5.- una forma de evitar la pérdida de energía mediante calor por una ventana consiste en colocar dos vidrios de $1,20\,m \times 0,80\,m$ y espesor $3\,mm$ separados por una capa de aire de $2,0\,mm$. Calcular el flujo de calor a través de esta ventana si la temperatura en el exterior es de $-4\,^oC$ y la temperatura en el interior es de $20\,^oC$

Datos: conductividad térmica del aire $\kappa_{aire} = 0,023\,W{\cdot}m^{-1}K^{-1}$; conductividad térmica del vidrio $\kappa_{vidrio} = 0,80\,W{\cdot}m^{-1}K^{-1}$

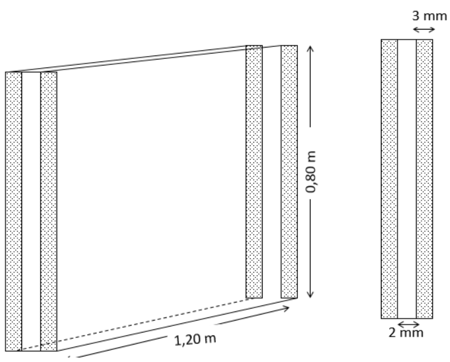

Figura 12: *Doble ventana*

Solución:

El sistema equivale a tener tres materiales (vidrio-aire-vidrio) en serie, calculamos primero la resistencia térmica de cada material:

$$R_{vidrio} = \frac{3 \times 10^{-3}}{0,80 \times (1,20 \times 0,80)} = 3,91 \times 10^{-3}\, W^{-1}K \tag{28}$$

$$R_{aire} = \frac{2 \times 10^{-3}}{0,023 \times (1,20 \times 0,80)} = 90,6 \times 10^{-3}\, W^{-1}K \tag{29}$$

la resistencia térmica total de la ventana:

$$R_{equiv} = 2R_{vidrio} + R_{aire} = 2 \times R_{vidrio} = 2 \times 3,91 \times 10^{-3} + 90,6 \times 10^{-3} = 98,42 \times 10^{-3}\, W^{-1}K \tag{30}$$

y teniendo en cuenta la ley de Ohm para la corriente térmica (o flujo de calor)

$$\triangle T = HR \Longrightarrow H = \frac{\triangle T}{R} = \frac{20-(-4)}{98,42 \times 10^{-3}} = 244\, W \tag{31}$$