Examen convocatoria Enero 2017 PARTE 1

(17 de enero de 2017)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Comprobar que la ecuación de Bernoulli, es dimensionalmente correcta, es decir, todos los sumandos que aparecen, tienen la misma ecuación de dimensiones.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h + P = cte \tag{1}$$

En donde ρ es la densidad del fluido, v la velocidad con que se mueve, g la aceleración de la gravedad, h es la altura respecto a un nivel de referencia y P es la presión .

Solución:

$$\left[\frac{1}{2}\rho v^2\right] = \frac{M}{L^3}\left(\frac{L}{T}\right)^2 = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[\rho g h] = \frac{M}{L^3}\frac{L}{T^2}L = ML^{-1}T^{-2}$$

$$[P] = \frac{F}{S} = \frac{M\frac{L}{T^2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$$

2.- Una fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo $\left|\vec{F}\right| = 600\,N$ lleva la dirección del punto $A(1,1,3)$ al punto $B(3,3,4)$. Determine: a) Componentes F_x, F_y y F_z . b) Ángulos que forma con cada uno de los ejes de coordenadas.

Solución:

Previamente, calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$, el cual se obtiene restando a las coordenadas del extremo B las coordenadas del origen A

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{3}\left(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}\right) \tag{2}$$

Entonces la expresión vectorial de $\vec{F}$, al igual, que la de cualquier vector, viene dada por:

$$\vec{F} = 600\,\vec{u}_{AB} = 400\,\vec{i} + 400\,\vec{j} + 200\,\vec{k}$$

siendo los cosenos directores las componentes del vector unitario.

$$cos\theta_x = cos\theta_y = \frac{2}{3}\,;\; cos\theta_z = \frac{1}{3}$$

luego:

$$\theta_x = \theta_y = Arccos\frac{2}{3} = 48,2^0 \; ; \; \theta_z = Arccos\frac{1}{3} = 70,5^o$$

3.- Dados los vectores:

$$\vec{b} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 1\,\vec{k} \qquad ; \qquad \vec{a} = 6\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

Obtenga: a) El producto vectorial $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$, b) Proyección del vector $\vec{c}$ sobre el vector $\vec{d} = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{k}$.

Solución:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 8\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$$

la proyección del vector $\vec{c}$ sobre el vector $\vec{d}$ es:

$$P_{\vec{C}_{\vec{d}}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{d}\right|} = \frac{8 \times 4 + 6 \times 0 + 0 \times (-3)}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{32}{5}$$

4.- Dada la fuerza $\vec{F} = 4\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 1\,\vec{k} N$ la cual está aplicada en el punto $A(3, 1, -2)$. Obtenga el momento de dicha fuerza respecto del eje que pasa por los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(3, 3, 4)$. Explique el significado físico del momento de una fuerza respecto de un eje.

Solución:

Primero vamos a obtener, el vector unitario en la dirección del eje:

$$\overrightarrow{PQ} = 2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_{eje} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}\left(2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 1\,\vec{k}\right)$$

a continuación calculamos el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto de un punto cualquiera del eje, por ejemplo respecto al punto Q , para ello obtenemos el vector $\overrightarrow{QA}$

$$\overrightarrow{QA} = 0\,\vec{i} - 2\,\vec{j} - 6\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M}_Q = \overrightarrow{QA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -20\,\vec{i} - 24\,\vec{j} + 8\,\vec{k}\,N \cdot m$$

y ahora proyectamos dicho momento sobre el eje,

$$M_{eje} = \vec{M}_Q \cdot \vec{u}_{eje} = \frac{2 \times (-20) + 2 \times (-24) + 1 \times 8}{3} = \frac{-80}{3} \, N \cdot m$$

También, puede obtenerse M_{eje} calculando el producto mixto de los vectores $\vec{u}_{eje}$, $\overrightarrow{QA}$ y $\vec{F}$

$$M_{eje} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-80}{3} \, N \cdot m$$

5.- Sabiendo que el punto C está en equilibrio, calcule las tensiones T_{CA} y T_{CB} de la figura,

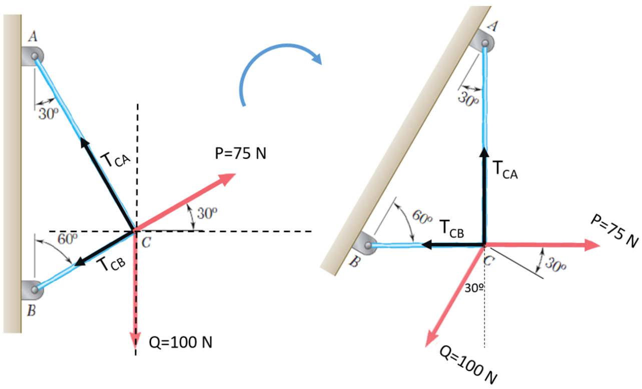

Figura 1: *Cuestión 5*

Solución:

Al estar en equilibrio, se tiene que verificar que la suma de todas las fuerzas sea cero.Si tenemos en cuenta la figura a, podemos escribir las dos ecuaciones correspondientes a cada uno de los ejes.

$$\sum F_x = 0; \Longrightarrow 75\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}T_{CA} + \frac{\sqrt{3}}{2}T_{CB} = 0$$

$$\sum F_y = 0; \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}T_{CA} + \frac{75}{2} - \frac{1}{2}T_{CB} - 100 = 0$$

Cuya solución es:

$$T_{CA} = 50\sqrt{3} \, N \; ; \; T_{CB} = 25 \, N$$

Puede observarse que si se giran los ejes 30^o en el sentido de las agujas del reloj, el ejercicio se resuelve más rápido; las ecuaciones en estos nuevos ejes son:

$$75 - T_{CB} - 50 = 0$$

$$T_{CA} - 50\sqrt{3} = 0$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1.-El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. se sabe que la tensión en el cable es de $300kN$, determine la reacción en el *empotramiento* E,

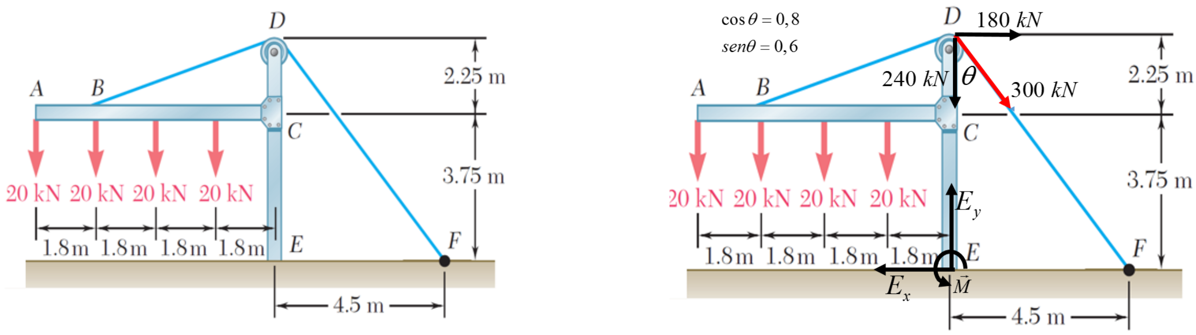

Figura 2: *Problema 1*

Solución:

En la figura de la derecha se muestra el diagrama de cuerpo libre de la estructura, se ha tenido en cuenta que en el empotramiento, además de las fuerzas vertical y horizontal, también ejerce un momento, que arbitrariamente lo hemos dibujado en el sentido positivo del eje perpendicular al plano del papel ($\vec{k}$). De la geometría del ejercicio es fácil deducir que:

$$cos\theta = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4,5^2}} = 0,8\,;\; sen\theta = \frac{4,5}{\sqrt{6^2 + 4,5^2}} = 0,6$$

Dado que existen tres incógnitas: las reacciones en el empotramiento E_x; E_y y el momento M y como podemos escribir tres ecuaciones ($\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$) *, al estar el sistema en equilibrio*, el problema está totalmente determinado:

$$180 - E_x = 0$$
$$-240 - 80 + E_y = 0$$
$$20 \times 7,2\,\vec{k} + 20 \times 5,4\,\vec{k} + 20 \times 3,6\,\vec{k} + 20 \times 1,8\,\vec{k} - E_x \times 6\,\vec{k} + M\,\vec{k} = \vec{0}$$

la solución de este sencillo sistema de ecuaciones es:

$$E_x = 180\,kN\,;\; E_y = 320\,kN\,;\; M = 720\,kN \cdot m$$

por consiguiente las reacciones en el empotramiento vienen expresadas por:

$$\vec{E} = -180\,\vec{i} + 320\,\vec{j}\,kN\,;\; \vec{M} = 720\,\vec{k}\,kN \cdot m$$

Problema 2 La armadura de la figura está sometida a las cargas que se muestran. Determine, mediante el método de los nodos de Cremona, la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

.

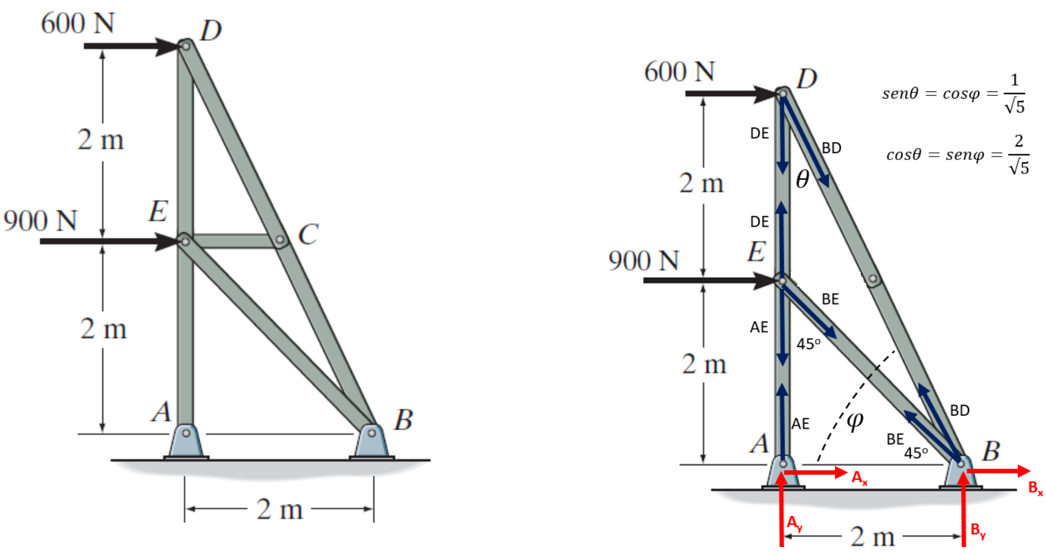

Figura 3: *Armadura problema 2*

Solución:

En la figura de la derecha se muestran las fuerzas (se han dibujando todas ellas en tensión) en cada uno de los nudos, así mismo puede observarse que se ha eliminado el elemento EC por ser un elemento de fuerza cero, ya que existen tres elementos, dos de ellos colineales.

Procedimiento 1

En primer lugar aplicamos las condiciones de equilibrio a las fuerzas exteriores; como son dos articulaciones se han dibujado en cada una de ellas una fuerza horizontal y otra vertical.

$$\sum F_x = 0; \Longrightarrow A_x + B_x + 1500 = 0 \tag{3}$$

$$\sum F_y = 0; \Longrightarrow A_y + B_y = 0 \tag{4}$$

$$\sum M_A = 0; \Longrightarrow B_y \times 2 - 600 \times 4 - 900 \times 2 = 0 \tag{5}$$

De la ecuación 5 se obtiene, que $B_y = 2100\ N$ y teniendo en cuenta la ecuación 4 $A_y = -2100\ N$. El signo negativo significa que su sentido es contrario al supuesto. Las fuerzas en el nodo A quedan como indica la figura

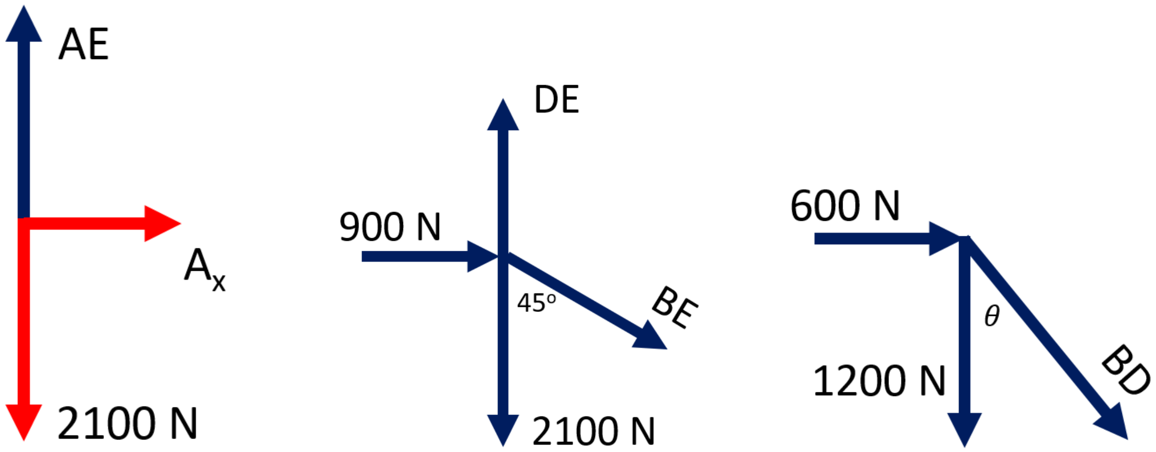

Figura 4: *Nodos armadura problema 2*

Observando el nodo A :

$$A_x = 0 \tag{6}$$

$$AE - 2100 = 0 \tag{7}$$

luego teniendo en cuenta las ecuaciones 6 y 3 se obtiene que:

$$B_x = -1500\ N$$

y de la ecuación 7

$$AE = 2100\ N$$

El valor de AE, se muestra en la figura correspondiente al nodo E , para el cual escribimos las ecuaciones de equilibrio:

$$900 + BE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{8}$$

$$DE - 2100 - BE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{9}$$

de la ecuación 8

$$BE = -\frac{1800}{\sqrt{2}} = -1273\ N$$

que al sustituirlo en la ecuación 9 se obtiene:

$$DE = 1200\ N$$

los signos obtenidos, nos indican que la barra BE trabaja a *«compresión»* y la barra DE al igual que la barra AE trabajan a *«tracción»* (*«tensión»*).

el valor obtenido para DE lo llevamos al nodo D, de la figura se obtiene:

$$600 + BD\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \tag{10}$$

$$-1200 - BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \tag{11}$$

las ecuaciones obtenidas son idénticas, cuya solución es:

$$BD = -600\sqrt{5} = -1342\ N$$

por tanto, la barra BD trabaja a *«compresión»*.

No ha sido necesario recurrir al nodo B , ahora bien, si sustituimos todos los valores encontrados BE, BD, B_x, B_y la sumatoria de todas ellas es cero.

Procedimiento 2

Escribimos las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nodos:

$$nodo\ A \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + AE = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ B \begin{cases} B_x - BE\frac{\sqrt{2}}{2} - BD\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\ B_y + -BE\frac{\sqrt{2}}{2} + BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ D \begin{cases} BD\frac{1}{\sqrt{5}} + 600 = 0 \\ -DE - BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ E \begin{cases} BE\frac{\sqrt{2}}{2} + 900 = 0 \\ -AE - BE\frac{\sqrt{2}}{2} + DE = 0 \end{cases}$$

Aunque su resolución es sencilla, podemos formar, con las 8 ecuaciones anterioress el sistema matricial :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ AE \\ BD \\ BE \\ DE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -600 \\ 0 \\ -900 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La resolución da como resultado:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ AE \\ BD \\ BE \\ DE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2100 \\ 1500 \\ 2100 \\ 2100 \\ -1342 \\ -1273 \\ 1200 \end{pmatrix} N$$

Resultado que coincide con el encontrado mediante el procedimiento 1.

Examen convocatoria Enero 2017 PARTE 2

(17 de enero de 2017)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Un frasco de vidrio con volumen de $100\,cm^3$ se llena hasta el borde con mercurio a 18 ºC. ¿Cuánto mercurio se desbordará si la temperatura del sistema se eleva a 78 ºC ? Los coeficientes de dilatación cúbica del vidrio y mercurio son respectivamente:

$$\beta_{vidrio} = 1,2 \times 10^{-5} K^{-1}; \beta_{Hg} = 1,8 \times 10^{-4} K^{-1}; \tag{1}$$

Solución:

Ya que el coeficiente de dilatación cúbica del vidrio es menor que el del aluminio, al aumentar la temperatura el volumen del mercurio será mayor que el volumen del frasco de vidrio, por tanto, el mercurio se derramará.

$$V_{Hg} = 100\,[1 + \beta_{Hg} 60] \tag{2}$$

$$V_{frasco} = 100\,[1 + \beta_{vidrio} 60] \tag{3}$$

restando las ecuaciones 2 y 3 se obtiene:

$$V_{derra} = V_{Hg} - V_{frasco} = 100(\beta_{Hg} - \beta_{vidrio})60 = 6 \times 10^3 (18 - 1,2) \times 10^{-5} = 1,01\,cm^3$$

2.- Un cilindro de aluminio de $60\,cm$ de longitud, con área transversal de $40\,cm^2$, se utiliza como espaciador entre dos paredes de acero. A 15 ºC el cilindro apenas se desliza entre las paredes. si se calienta a 35 ºC , ¿qué esfuerzo habrá en el cilindro y qué fuerza total ejercerá sobre cada pared, suponiendo que las paredes son perfectamente rígidas y están separadas por una distancia constante?

Datos para el aluminio: coeficiente de dilatación lineal $\alpha_{Al} = 2,4 \times 10^{-5} K^{-1}$; módulo de Young $\Upsilon = 7 \times 10^{11} Pa$

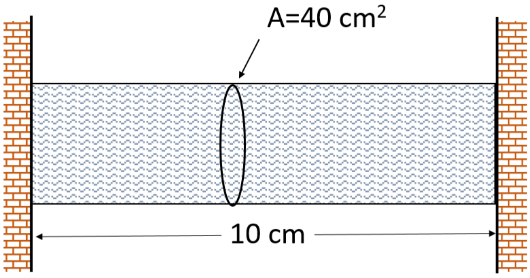

Figura 1: *Cuestión 2*

Solución:

$$\frac{F}{A} = -\alpha\Upsilon\triangle T = -2,4\times10^{-5}\times7\times10^{11}\times20 = -3,4\times10^{8}Pa$$

El signo menos nos indica que el cilindro está sometido a una fuerza de «*compresión*». Siendo la fuerza que el cilindro ejerce sobre cada pared:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = 3,4\times10^{8}\times A = 3,4\times10^{8}\times40\times10^{-4} = 1,36\times10^{6}N$$

3.- Un cuerpo A, de masa "m", a $20^{\underline{o}}C$ se pone en contacto con otro B, de masa "$3m$", a $80^{\underline{o}}C$. El intercambio de energía ocurre sin pérdidas al exterior y la temperatura de equilibrio es 40ºC. Calcule la relación entre los calores específicos de los cuerpos $\frac{c_A}{c_B}$.

Solución:

En el intercambio de calor se verifica:

$$|Q_{cedido}| = |Q_{absorbido}| \tag{4}$$

el cuerpo B al estar a mayor temperatura cede calor y el cuerpo A absorbe calor; aplicando la ecuación 4

$$3\cancel{m}c_B(80-40) = \cancel{m}c_A(40-20); \Longrightarrow \frac{c_A}{c_B} = 6$$

4.- Un resorte de constante elástica $k = 160N\cdot m^{-1}$descansa verticalmente en la parte inferior de un vaso de precipitados grande de agua. Un bloque de $5,00\,kg$ de madera ($\rho_m = 650\,kg\cdot m^{-3}$) está conectado al resorte, el sistema se deja que alcance el equlibrio estático. ¿Cuánto vale el alargamiento $\triangle L$ del resorte? . Suponga que $\rho_{agua} = 1,00\times10^{3}\;Kg\cdot m^{-3}$.

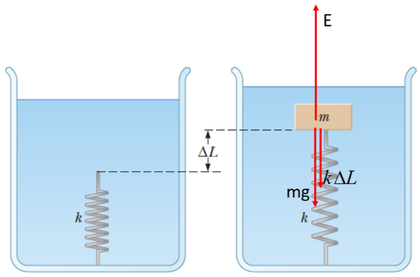

Figura 2: *Cuestión 4*

Solución:

Al estar el bloque de madera en equilibrio, se cumple:

$$E - mg - k\triangle L = 0 \tag{5}$$

Si tenemos en cuenta que el empuje es igual al peso del volumen del fluido desalojado, en este caso el volumen del bloque de madera, ya que está totalmente sumergido:

$$E = V\rho_{agua}g = \frac{m}{\rho_m}\rho_{agua}g \tag{6}$$

sustituimos en la ecuación 5

$$\frac{m}{\rho_m}\rho_{agua}g - mg = k\triangle L; \Longrightarrow \triangle L = \frac{mg(\frac{\rho_{agua}}{\rho_m} - 1)}{k}$$

y al sustituir los valores numéricos, obtenemos:

$$\triangle L = \frac{5 \times 9,81(\frac{1000}{650} - 1)}{160} = 0,165\, m$$

5.- Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de $12\, m^2$ y $1200\, kg$ de masa. El nivel del agua en el depósito es de $3,5\, m$ de altura. Calcule la presión en el fondo. Tomar el valor de $g = 9,81\, ms^{-2}$, y el valor de la presión atmosférica, $P_{atm} = 1,01 \times 10^5\ Pa$

Solución:

La presión en el fondo del depósito es debida a la presión atmosférica, la ejercida por el peso de la placa y a la presión hidrostática, por consiguiente:

$$P = 1,01 \times 10^5 + \frac{1200 \times 9,81}{12} + 1000 \times 9,81 \times 3,5 = 1,36 \times 10^5 Pa$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 Cada uno de los tres elementos del bastidor tiene una masa por unidad de longitud de 6 $kg \cdot m^{-1}$. Localice la posición $(\bar{X}, \bar{Y})$ del centro de masa. Ignore el tamaño de los pasadores en los nodos y el espesor de los elementos. Además calcule las reacciones en la articulación A y el rodillo E .

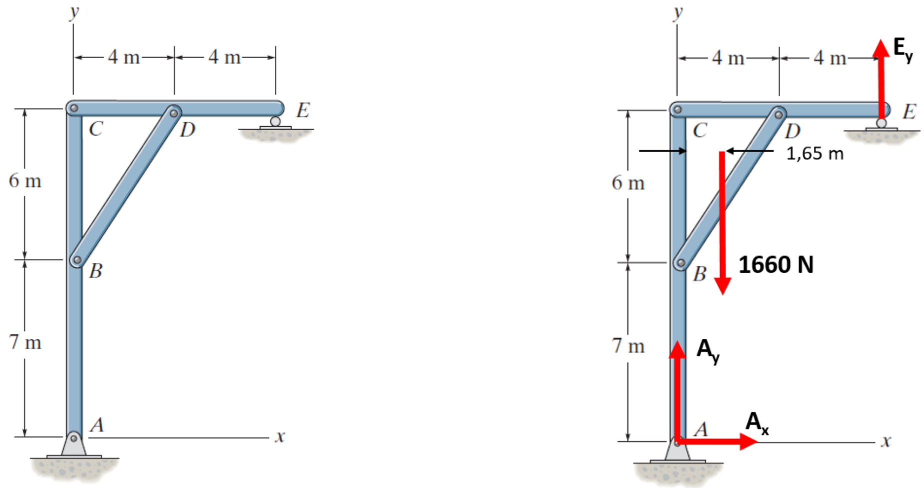

Figura 3: *Bastidor, problema 1*

Solución:

Figura	*Longitud* (m)	$x\ (m)$	$y\ (m)$	$xL\ (m^2)$	$yA\ (m^2)$
1	13	0	6,5	0	84,5
2	8	4	13	32	104
3	$\sqrt{6^2+4^2}$	2	10	14,4	72
Total	$28,2\,m$			$46,4\,m^2$	$260,5\,m^2$

Por tanto:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{46,4}{28,2}, \frac{260,5}{28,2}) \ = (1,65\,m, 9,24\,m) \tag{7}$$

La masa total del bastidor es :

$$M = L\lambda = 28,2 \times 6 = 169,2\,kg\ ;\ W = Mg = 169,2 \times 9,81 = 1660\,N$$

Escribimos ahora las ecuaciones de equilibrio del sistema:

$$A_x = 0 \tag{8}$$

$$A_y + E_y - 1660 = 0 \tag{9}$$

y tomando momentos respecto al punto A

$$-1660 \times 1,65 + E_y \times 8 = 0 \tag{10}$$

de la ecuación 10

$$E_y = 342\ N$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones 8 y 9

$$A_x = 0\ N\ ,\ A_y = 1318\ N$$

Problema 2 Determine: a) Los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} con respecto a los ejes X e Y que tienen su origen en el centroide de la figura. b) El producto de inercia I_{xy} c) Mediante el círculo de Mhor obtenga los momentos principales de inercia y los ejes principales de inercia.

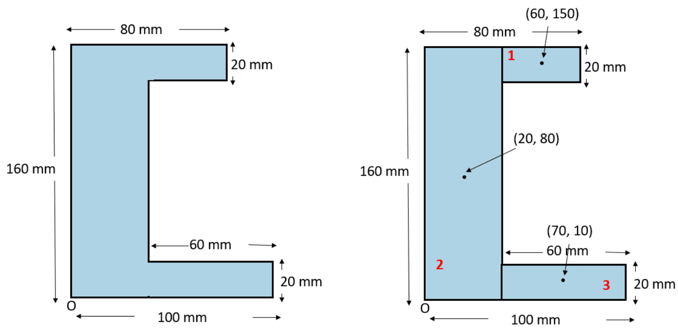

Figura 4: Problema 2

Solución:

En primer lugar calculamos la posición del centroide de la figura compuesta $(\bar{X}, \bar{Y})$

Figura	$Area\ (mm^2)$	$x\ (mm)$	$y\ (mm)$	$xA\ (mm^3)$	$yA\ (mm^3)$
1	800	60	150	48000	120000
2	6400	20	80	128000	512000
3	1200	70	10	84000	12000
Total	$8400\ mm^2$			$260000\ mm^3$	$644000\ mm^3$

Por tanto:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{260000}{8400}, \frac{644000}{8400}) = (31\ mm, 76{,}7\ mm) \tag{11}$$

Como tenemos que aplicar el teorema de Steiner para calcular los momentos y productos de inercia respecto a ejes que pasan por el centroide; es necesario calcular la distancia entre los ejes que pasan por el centro de cada una de la figuras y los ejes que pasan por el centroide. En la siguiente tabla se muestran las distancias respectivas:

Figura	$d_x\ (mm)$	$d_y\ (mm)$
1	$60 - 31 = 29$	$150 - 76,7 = 73,3$
2	$20 - 31 = -11$	$80 - 76,7 = 3,3$
3	$70 - 31 = 39$	$10 - 76,7 = -66,7$

Ahora ya podemos proceder a calcular los momentos de inercia de cada una de las figuras y los momentos de inercia totales. Teniendo en cuenta que para un rectángulo la expresión del momento de inercia con respecto a ejes que pasan por su centro son:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \tfrac{1}{12} b^3 a \\ I_{y'} &= \tfrac{1}{12} a^3 b \\ I_{x'y'} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

De forma sistemática realizamos las siguientes tablas:

Figura	$I_{x'}\ (mm^4)$	$I_{y'}\ (mm^4)$	$I_{x'y'}(mm^4)$
1	$\frac{1}{12}40 \times 20^3$	$\frac{1}{12}40^3 \times 20$	0
2	$\frac{1}{12}40 \times 160^3$	$\frac{1}{12}160 \times 40^3$	0
3	$\frac{1}{12}60 \times 20^3$	$\frac{1}{12}20 \times 60^3$	0

Figura	$I_x\ (mm^4) = I_{x'} + d_y^2 A$	$I_y\ (mm^4) = I_{y'} + d_x^2 A$	$I_{xy}\ (mm^4) = I_{x'y'} + d_x d_y A$
1	$\frac{1}{12}40 \times 20^3 + 73,3^2 \times 800$	$\frac{1}{12}40^3 \times 20 + 29^2 \times 800$	$73,3 \times 29 \times 800$
2	$\frac{1}{12}40 \times 160^3 + 3,33^2 \times 6400$	$\frac{1}{12}160 \times 40^3 + (-11)^2 \times 6400$	$3,3 \times (-11) \times 6400$
3	$\frac{1}{12}60 \times 20^3 + (-66,7)^2 \times 1200$	$\frac{1}{12}20 \times 60^3 + 39^2 \times 1200$	$(-66,7) \times 39 \times 1200$
Total	$23,4 \times 10^6\ mm^4$	$4,59 \times 10^6\ mm^4$	$-1,65 \times 10^6\ mm^4$

El tensor de inercia correspondiente a la sección de la figura es:

$$\begin{pmatrix} 23,4 & -1,65 \\ -1,65 & 4,59 \end{pmatrix} \times 10^6\ mm^4$$

El cálculo de los momentos pricipales y ejes principales de inercia, lo realizamos mediante el círculo de Mohr, que mostramos en la figura:

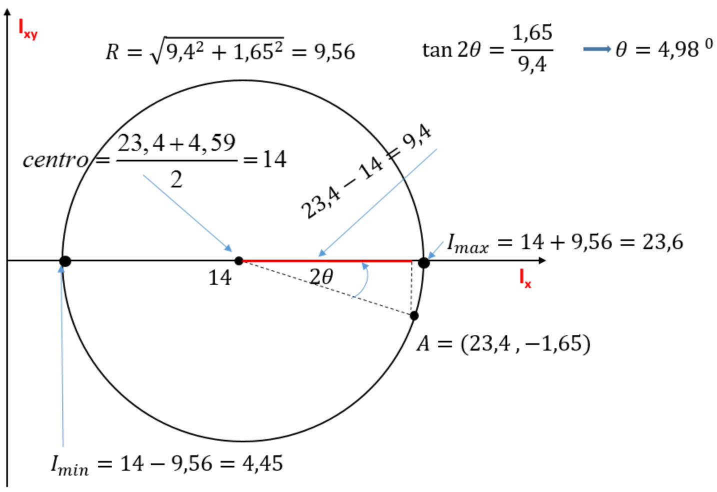

Figura 5: *Círculo de Mohr*

Los ejes principales se obtienen girando $4,98^o$ en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Respecto de estos ejes el tensor de inercia viene dado:

$$\begin{pmatrix} 23,6 & 0 \\ 0 & 4,45 \end{pmatrix} \times 10^6 \, mm^4$$

Resultado que podríamos haber llegado tras diagonalizar la matriz :

$$\begin{pmatrix} 23,4 & -1,65 \\ -1,65 & 4,59 \end{pmatrix} \times 10^6 \, mm^4$$