UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

EXAMEN PRIMER PARCIAL

(5 DE NOVIEMBRE DE 2015)

Estudiante ———————————————————**GRUPO**

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- a) Realice las siguientes operaciones: a) $8,536 \times 0,47$. b) $384/285,3$. c) $34,6+17,86+15$ d) $20,02+20,002+20,0002$

$8,536 \times 0,47 = 4,0$ $\quad$ $384/285,3 = 1,35$ $\quad$ $34,6+17,86+15 = 67$

$20,02+20,002+20,0002 = 60,02$

b) La fuerza gravitaroria con la cual se atraen dos partículas, viene dada por:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

en donde G es la constante de gravitación universal m_i las masas de las partículas y r la distancia que las separa. Obtenga la ecuación de dimensiones de G

Despejando G de la ecuación 1 se obtiene:

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

y teniendo en cuenta las dimensiones de cada uno de los términos que aparecen,

$$[G] = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3T^{-2};\ kg^{-1}\cdot m^3\cdot s^{-2}$$

2.- a) Sabiendo que $1\,kp = 9,81\,N$. Exprese la presión de $20\,kp/cm^2$ en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

$$20\,kp/cm^2 = \frac{20\times 9,81\,N}{10^{-4}m^2} = 1,96\cdot 10^6\frac{N}{m^2} = 1,96\cdot 10^6 Pa$$

b) Si la densidad del mercurio es $\rho = 13,6\,g\cdot cm^{-3}$, obtenga su valor en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

$$\rho = 13,6\,g\cdot cm^{-3} = \frac{13,6\times 10^{-3}kg}{10^{-6}m^3} = 1,36\times 10^4\frac{kg}{m^3}$$

3.- Dados los vectores:

$$\vec{a} = -2\,\vec{i} - 1\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \qquad ; \qquad \vec{b} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$$

Obtenga: a) Ángulo que forman. b) Proyección del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$.

De la definición de producto escalar de dos vectores se obtiene:

$$cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{-6+4}{3\times 5} = \frac{-2}{15}; \theta = arccos\frac{-2}{15} = 97,7^{o}$$

$$P_{\vec{b}_{\vec{a}}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{-2}{3}$$

4.- a) Defina producto vectorial de dos vectores $\vec{a}, \vec{b}$. b) Obtenga el producto vectorial de los vectores $\vec{a}, \vec{b}$ dados en la cuestión 3. Compruebe que dicho vector $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$ y al vector $\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 8\,\vec{i} + 6\vec{j} + 11\vec{k} = \vec{c}$$

Si dos vectores son perpendiculares, su producto escalar es cero, por consiguiente, vamos a calcular el producto escalar del vector $\vec{c}$ por el vector $\vec{a}$ y por el vector $\vec{b}$.

$$\vec{c}\cdot\vec{a} = 8\times(-2) + 6\times(-1) + 11\times 2 = 0; \qquad \vec{c}\cdot\vec{b} = 8\times 3 + 6\times(-4) + 11\times 0 = 0$$

5.- a) Defina momento de una fuerza $\vec{F}$ respecto a un eje . b)Explique cual es el significado físico de dicho momento.

Consultar apuntes de clase.

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\left|\vec{P}\right| = 500\,N$ y $\alpha = 60°$, determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC.

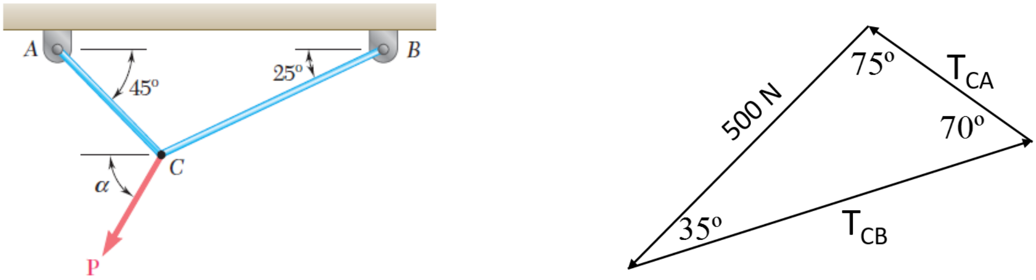

Figura 1: *Problema 1*

Solución:

En la figura 1-b se han dibujado las tres fuerzas que actúan, una a continuación de la otra, al ser la suma cero, forman el triángulo que se muestra, y aplicando el teorema del seno a dicho triángulo, obtenemos las dos tensiones:

$$\frac{500\,N}{sen70} = \frac{T_{CA}}{sen35} = \frac{T_{CB}}{sen75} \tag{2}$$

resolviendo las dos ecuaciones:

$$T_{CA} = sen35\frac{500\,N}{sen70} = 305\,N$$

$$T_{CB} = sen75\frac{500\,N}{sen70} = 514\,N$$

Podemos solucionar el ejercicio, obteniendo la expresión vectorial de cada una de las tres fuerzas y aplicar $\sum \vec{F} = \vec{0}$:

$$\begin{gathered}\vec{T}_{CB} = T_{CB}cos25\,\vec{i} + T_{CB}sen25\,\vec{j}\\ \vec{T}_{CA} = -T_{CA}cos45\,\vec{i} + T_{CA}sen45\,\vec{j}\\ \vec{P} = -250\,\vec{i} - 250\sqrt{3}\,\vec{j}\end{gathered} \tag{3}$$

sumando las tres ecuaciones e igualando al vector cero, se tiene:

$$\left(T_{CB}cos25 - T_{CA}cos45 - 250\right)\,\vec{i} + \left(T_{CB}sen25 + T_{CA}sen45 - 250\sqrt{3}\right)\,\vec{j} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} \tag{4}$$

De la ecuación vectorial [4], obtenemos las dos ecuaciones escalares [5]

$$\begin{aligned} T_{CB}cos25 - T_{CA}cos45 = 250 \\ T_{CB}sen25 + T_{CA}sen45 = 250\sqrt{3} \end{aligned} \tag{5}$$

y resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$T_{CB} = 514\,N$$
$$T_{CA} = 305\,N$$

Problema 2 a) Determine el momento producido por la fuerza $\vec{F}$ que se muestra en la figura, respecto al punto O. Exprese el resultado como un vector cartesiano. b) Calcule el momento de dicha fuerza respecto al eje z

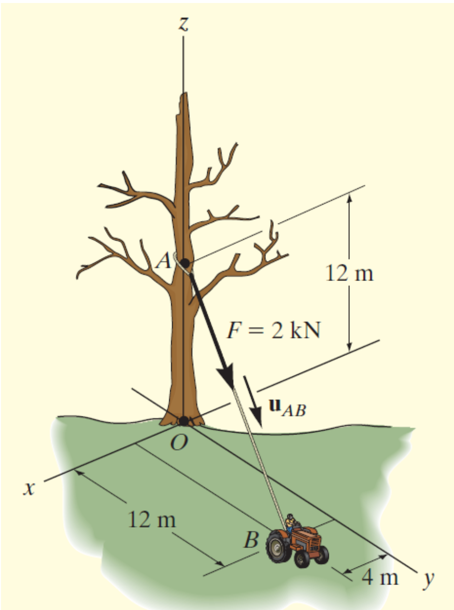

Figura 2: *Problema 2*

Solución:

De la figura, se obtienen las coordenadas de los puntos :

$$A(0,0,12)\;;\;B(4,12,0)$$

$$\vec{AB} = 4\,\vec{i} + 12\vec{j} - 12\vec{k}\;;\;\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{16+144+144} = 4\sqrt{19}\;;\;\vec{u}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{\left|\vec{AB}\right|} = \frac{1}{\sqrt{19}}(\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k})$$

luego la fuerza la podemos expresar como:

$$\vec{F} = \frac{2}{\sqrt{19}}(\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k})\;kN$$

y dado que el vector $\vec{OA} = 12\,\vec{k}$

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \frac{2}{\sqrt{19}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -16,5\,\vec{i} + 5,5\,\vec{j}\ \ kN \cdot m$$

Para calcular el momento respecto al eje Z, tenemos que proyectar el momento respecto de O sobre el el Z cuyo vector unitario es $\vec{k}$, al realizar el producto escalar de $\vec{M}_O$ con el vector $\vec{k}$ el resultado que se obtiene es cero. Resultado lógico ya que el giro alrededor del eje Z producido por la fuerza $\vec{F}$ es nulo.

Problema 3 El alambre de una antena está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de $4000\,N$. Determine a) las componentesF_x, F_y yF_z de la fuerza que actúa sobre el perno y b) los ángulos θ_x, θ_y, y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

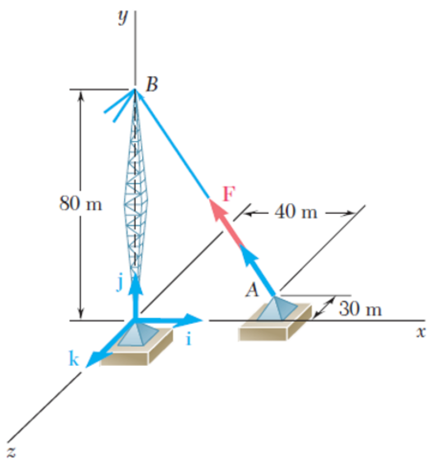

Figura 3: *Antena sujeta por tres cables*

Solución:

Al igual que en el problema anterior, la expresión de la fuerza la determinaremos mediante la expresión:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right| \vec{u}_{AB}$$

las coordenadas de los puntos :

$$A(40, 0, -30)\ ;\ B(0, 80, 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = -40\,\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}\ ;\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1600 + 6400 + 900} = 10\sqrt{89}\ ;\ \vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1}{\sqrt{89}}(-4\,\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k})$$

luego:

$$\vec{F} = \frac{4000}{\sqrt{89}}(-4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k})\ N$$

de donde

$$F_x = -1596\ N; \quad F_y = 3392\ N; \quad F_z = 1272\ N$$

los cosenos directores son las componentes del vector unitario, por consiguiente:

$$\theta_x = arccos\frac{-4}{\sqrt{89}} = 115^o; \quad \theta_y = \text{arccos}\frac{8}{\sqrt{89}} = 32^o; \quad \theta_z = \text{arccos}\frac{3}{\sqrt{89}} = 71{,}5^o$$

Problema 4 Sabiendo que la tensión en el alambre BD es de $1300\,N$, determine la reacción en el *empotramiento* C.

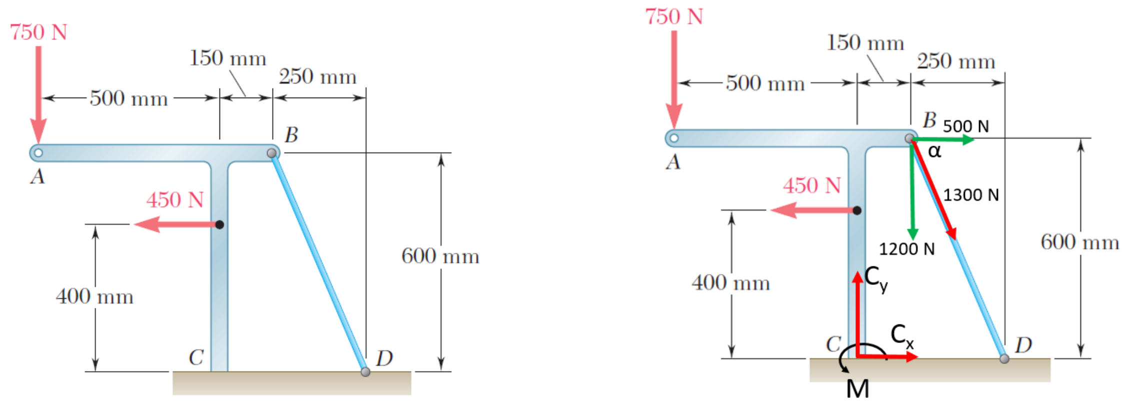

Figura 4: *Problema 4*

Solución:

Teniendo en cuenta la geometría de la figura, se observa que

$$sen\alpha = \frac{600}{\sqrt{600^2 + 250^2}} = 0,923\ ;\ cos\alpha = \frac{250}{\sqrt{600^2 + 250^2}} = 0,384$$

y por tanto la tensión, cuyo valor es 1300 N , sus componentes, que se muestran en la figura [4] vienen dadas por:

$$T_x = 1300cos\alpha = 500\ N\ ;\ T_y = 1300sen\alpha = 1200\ N$$

Se muestran las reacciones en el empotramiento: una reacción vertical, otra horizontal y un par, las cuales se oponen al desplazamiento vertical, desplazamiento horizontal y a una rotación. Aplicando las condiciones de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0; \Longrightarrow 500 + C_x - 450 = 0\ ;\ C_x = -50\ N$$

el signo negativo nos indica que el sentido real de C_x es contrario al supuesto inicialmente.

$$\sum F_y = 0; -750 - 1200 + C_y = 0\ ;\ C_y = 1950\ N$$

$$\sum M_C = 0; \Longrightarrow 750 \times 0,5 + 450 \times 0,4 + M - 1200 \times 0,15 - 500 \times 0,56 = 0\ ;\ M = -75\ N \cdot m$$

en resumen:

$$\vec{C} = -50\vec{i} + 1950\vec{j} \quad N;\ \vec{M} = -75\vec{k} \quad N \cdot m$$

Problema 5 Dada la armadura de la figura. a) Verifique que es una estructura isostática. b) Encuentre los elementos de fuerza cero. c) Determine la fuerza en cada una de articulaciones A y E, así como en cada uno de los elementos (barras). Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

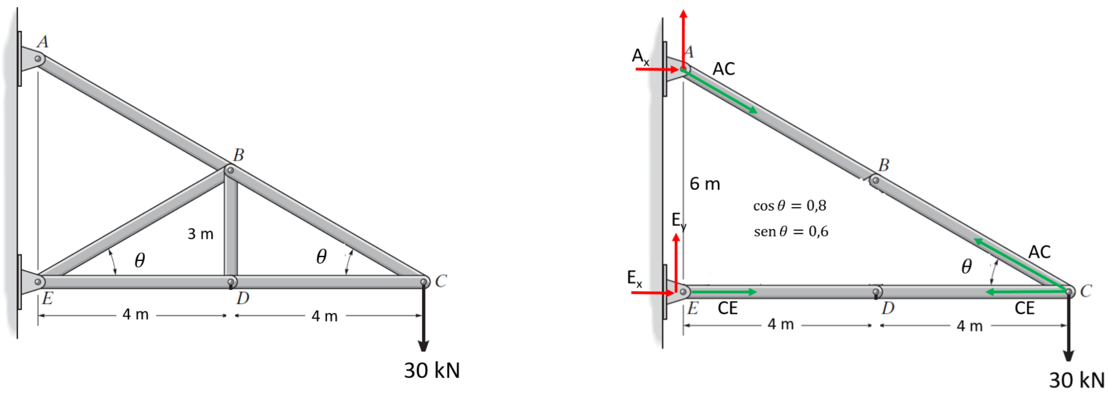

Figura 5: *Armadura*

Solución:

Para que sea una estructura isostática, se tiene que cumplir que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas, dado que por cada nodo se obtienen dos ecuaciones y que la incógnitas son la fuerzas en cada una de las barras y las reacciones exteriores, se tiene que verificar que:

$$2NN = NB + NR$$

es decir el doble del número de nodos debe ser igual al número de barras más el número de reacciones, en este caso

$$2 \times 5 = 6 + 4$$

Teniendo en cuenta que en un nodo con tres elementos, estando dos de ellos colineales, el tercer elemento es de fuerza cero; entonces el elemento BD es de fuerza cero y se puede eliminar, al igual que el elemento BE . La armadura una vez eliminados los nodos D y B se muestra en la figura 5-b.

Vamos a aplicar las condiciones de equilibrio, atendiendo a las fuerzas exteriores que actúan sobre la armadura:

$$\begin{gathered}\sum F_x^{ext} = 0 \Longrightarrow A_x + E_x = 0 \\ \sum F_y^{ext} = 0 \Longrightarrow A_y + E_y - 30 = 0 \\ \sum M_A^{ext} = 0 \Longrightarrow -30 \times 8 - A_x \times 6 = 0\end{gathered} \tag{6}$$

Obtenemos que

$$A_x = -40\ kN\ ;\ E_x = 40\ kN$$

El signo negativo de E_x significa que el sentido real es contrario al supuesto inicialmente.

Aplicamos las condiciones de equilibrio al nodo E

$$nodo\ E \left\{ \begin{array}{c} 40 + CE = 0 \\ E_y = 0 \end{array} \right.$$

por tanto

$$CE = -40\ kN\ ;\ E_y = -0$$

y teniendo en cuenta la ecuación 6 $A_y = 30\ kN$, la barra CE trabaja, por tanto, a compresión.

Ahora, condiciones de equilibrio en el nodo C

$$nodo\ C \left\{ \begin{array}{c} 40 - AC \cdot 0,8 \\ AC \cdot 0,6 - 30 = 0 \end{array} \right.$$

de cualquiera de las dos ecuciones se obtiene que

$$AC = 50\ kN$$

por tanto la barra AC trabaja a tensión.

Procedimiento b

Escribimos las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nudos:

$$nodo\ A \left\{ \begin{array}{c} A_x + 0,8AC = 0 \\ A_y - 0,6AC = 0 \end{array} \right.$$

$$nodo\ C \left\{ \begin{array}{c} -0,8AC - CE = 0 \\ 0,6AC - 30 = 0 \end{array} \right.$$

$$nodo\ E \left\{ \begin{array}{c} E_x + CE = 0 \\ E_y = 0 \end{array} \right.$$

Con las 6 ecuaciones anteriores formamos el sistema matricial de la figura

Ax	Ay	Ex	Ey	AC	CE	Indte
1,0	0,0	0,0	0,0	0,8	0,0	0,0
0,0	1,0	0,0	0,0	-0,6	0,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	-0,8	-1,0	0,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0	30,0
0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0
0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0

1,0	0,0	0,0	-1,3	0,0	0,0	Ax	-40,0
0,0	1,0	0,0	1,0	0,0	0,0	Ay	30,0
0,0	0,0	1,0	1,3	1,0	0,0	Ex	40,0
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	Ey	0,0
0,0	0,0	0,0	1,7	0,0	0,0	AC	50,0
0,0	0,0	-1,0	-1,3	0,0	0,0	CE	-40,0

Figura 6: *Sistema de ecuaciones en forma matricial con sus soluciones*