UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

Física I

tema 2

Objetivos del tema

- Mostrar cómo se suman las fuerzas y cómo se obtienen sus componentes.

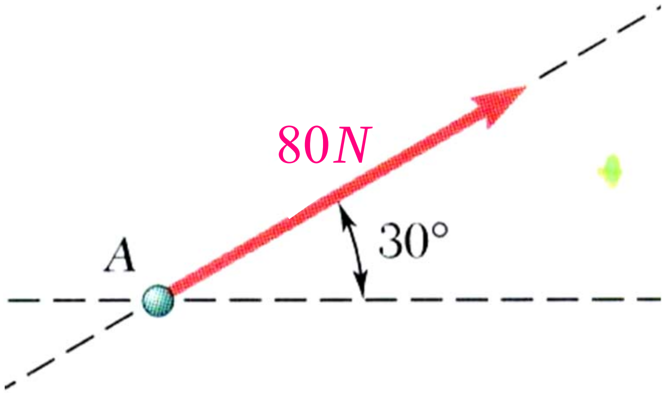
- Expresar una fuerza y su posición en forma de un vector cartesiano y explicar como se determina la dirección y magnitud del vector.

- Presentar el concepto de diagrama de cuerpo libre para una partícula.

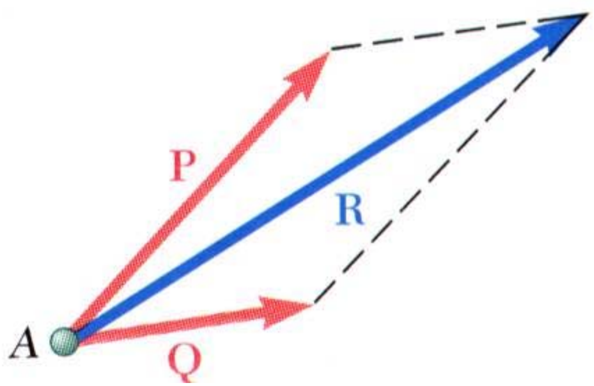
- Resolver problemas de equilibrio de una partícula

- Presentar el producto escalar (producto punto) con el fin de determinar el ángulo entre dos vectores o la proyección de un vector sobre otro.

Resultante de dos fuerzas

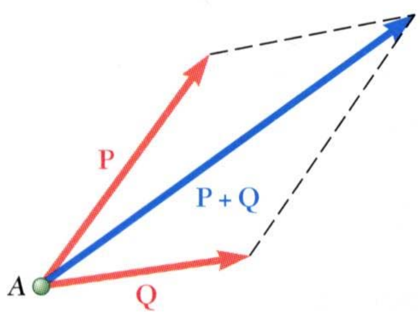


- fuerza: acción de un cuerpo sobre otro; se caracteriza por: *punto de aplicación*, *magnitud*, *linea de acción*, *y sentido*.

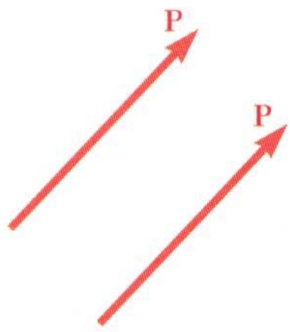


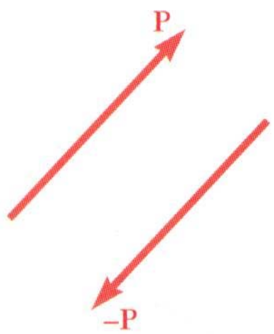
- Las evidencias experimentales indican que el efecto combinado de dos fuerzas puede ser representada por una sola fuerza *resultante* .
- La resultante es equivalente a la diagonal de un paralelogramo, que contiene las dos fuerzas en lados adyacentes
- La fuerza es una magnitud vectorial.

Vectores



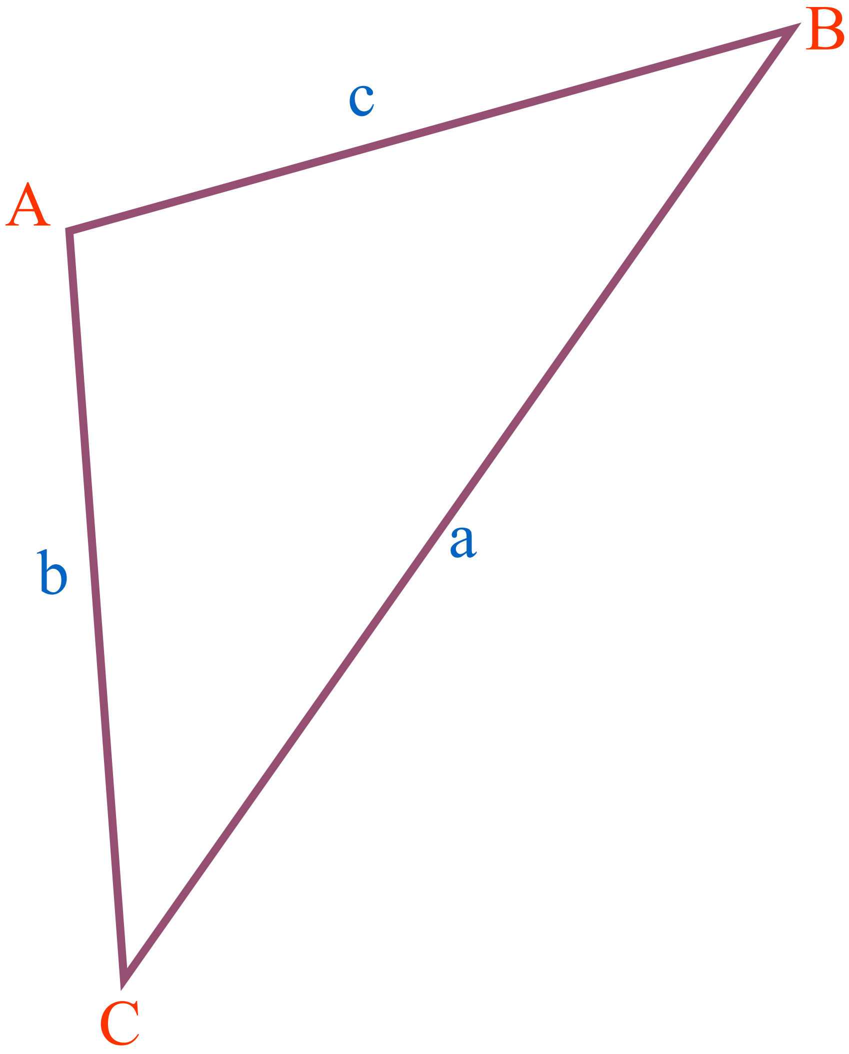
- *Vectores:* son magnitudes que poseen cantidad y dirección que se suman de acuerdo a la ley del paralelogramo. Ejemplos: desplazamientos, velocidades, aceleraciones
- *Escalares*: magnitudes que poseen únicamente cantidad, pero no dirección. Ejemplos: masa, volumen,
- Clasificación de los vectores
  - *vectores fijos*: no se pueden cambiar sus puntos de aplicación sin afectar a un análisis.
    vectores libres pueden moverse libremente en el espacio sin cambiar su efecto. en el análisis.
    vectores deslizantes se puede aplicar en cualquier punto de su línea de.





- *Vectores iguales* tienen el mismo módulo igual dirección y sentido
- *Vectores opuestos* tienen la misma dirección el mismo módulo pero sentido contrario.

Triángulo. Teoremas del Seno y del Coseno



Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

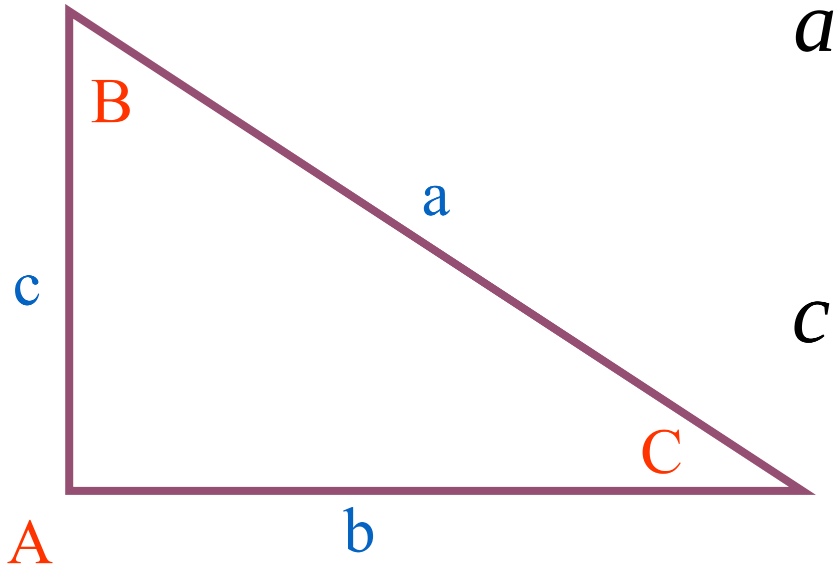
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Teorema del seno

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$

Triángulo Rectángulo. Relaciones trigonométricas

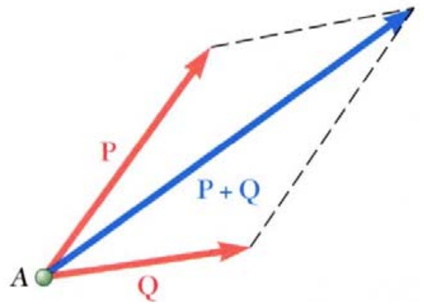


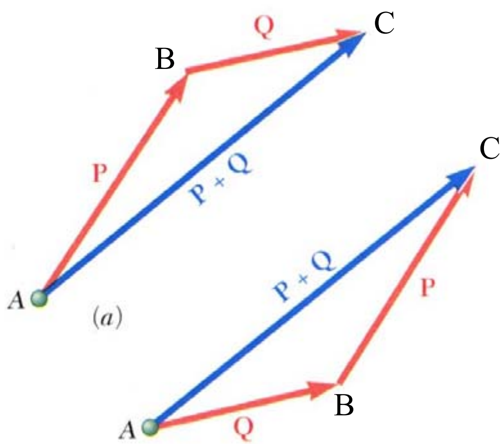
$$a^2 = b^2 + c^2$$

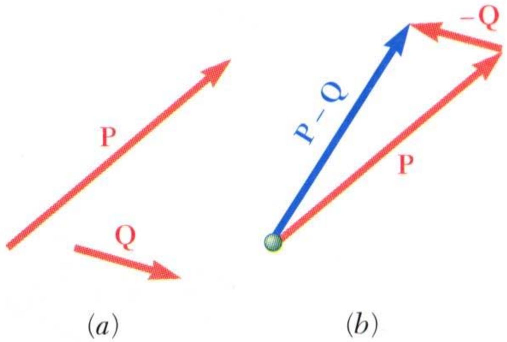
$$c = a\cos B = a\ senC$$

$$b = asenB = a\ \cos C$$

Suma de Vectores







- Regla del paralelogramo para sumar vectores
- Regla del triángulo
- Teorema del coseno,

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

- Teorema del seno

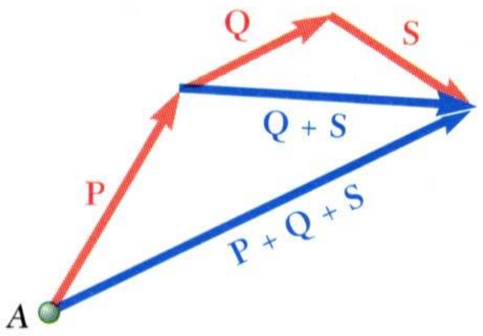
$$\frac{P}{senA} = \frac{R}{senB} = \frac{Q}{senC}$$

- La suma de vectores es conmutativa,

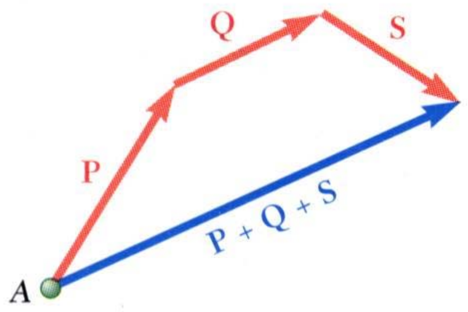
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

- Resta de vectores

Suma de Vectores

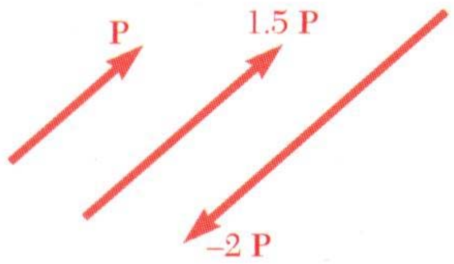


- Suma de tres o más vectores, tras aplicar la regla del triángulo



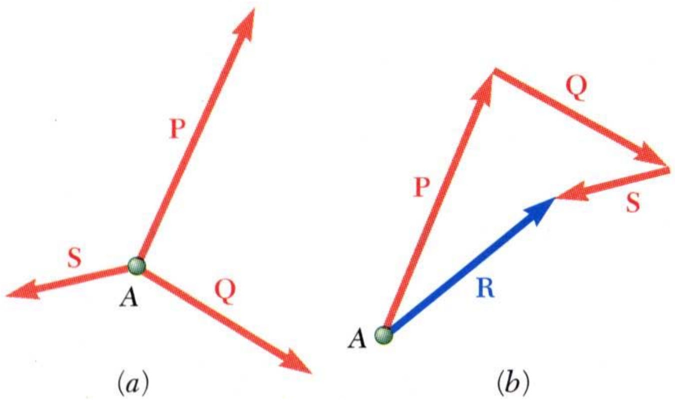
- Regla del polígono para sumar tres o más vectores.
- La suma de vectores es asociativa,

$$\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}=\left(\vec{P}+\vec{Q}\right)+\vec{S}=\vec{P}+\left(\vec{Q}+\vec{S}\right)$$

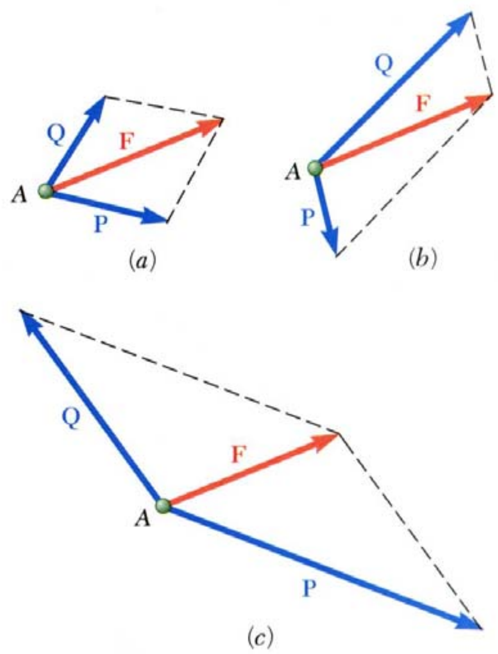


- Multiplicación de un vector por un escalar

Resultante de varias fuerzas concurrentes

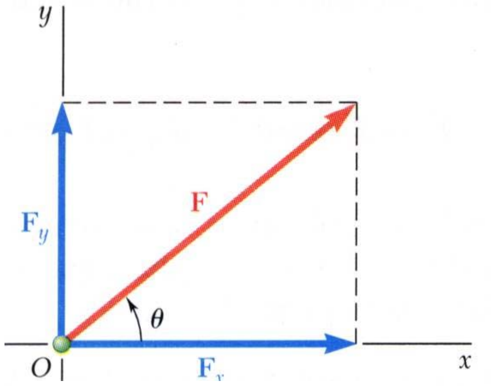


- **Fuerzas concurrentes**: conjunto de fuerzas que pasan por el mismo punto. Un conjunto de fuerzas concurrentes aplicado a una partícula puede ser sustituida por una sola fuerza resultante que es la suma vectorial de las fuerzas aplicadas



- **Componentes del vector fuerza**: dos o más vectores de fuerza que, en conjunto, tienen el mismo efecto que un vector de fuerza única

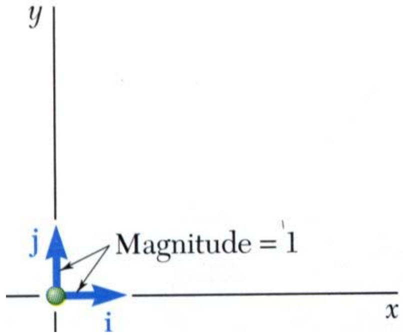
Componentes Rectangulares de una fuerza:



- En muchos problemas es conveniente descomponer una fuerza en dos componentes perpediculares entre sí

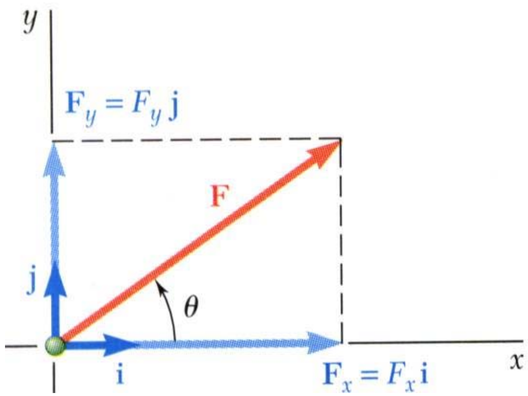
$$\vec{F}_x \text{ y } \vec{F}_y$$

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$$



- Se definen dos vectores perpendiculares $\vec{i}$ y $\vec{j}$

vectores unitarios los cuales son paralelos a los ejes x e y

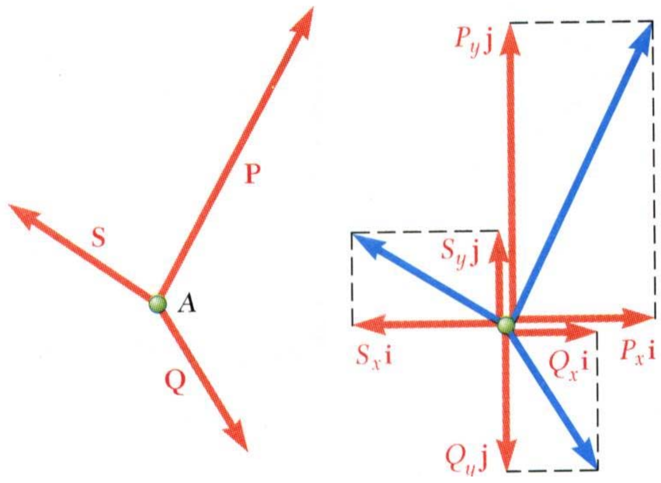


- Las componentes del vector pueden expresarse en función de los vectores unitarios en la forma:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}$$

F_x y F_y son las *componentes escalares* de $\vec{F}$

Suma de fuerzas mediante sus componentes

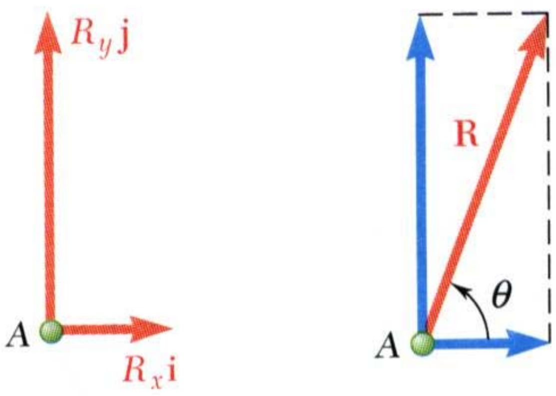


- Se quiere encontrar la resultante de 3 o más fuerzas concurrentes,

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

- Se escribe cada fuerza en componentes rectangulares

$$\begin{aligned} R_x \vec{i} + R_y \vec{j} &= P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + S_x \vec{i} + S_y \vec{j} \\ &= \left(P_x + Q_x + S_x\right)\vec{i} + \left(P_y + Q_y + S_y\right)\vec{j} \end{aligned}$$



- Los componentes escalares de la resultante son iguales a la suma de las componentes escalares de las fuerzas dadas

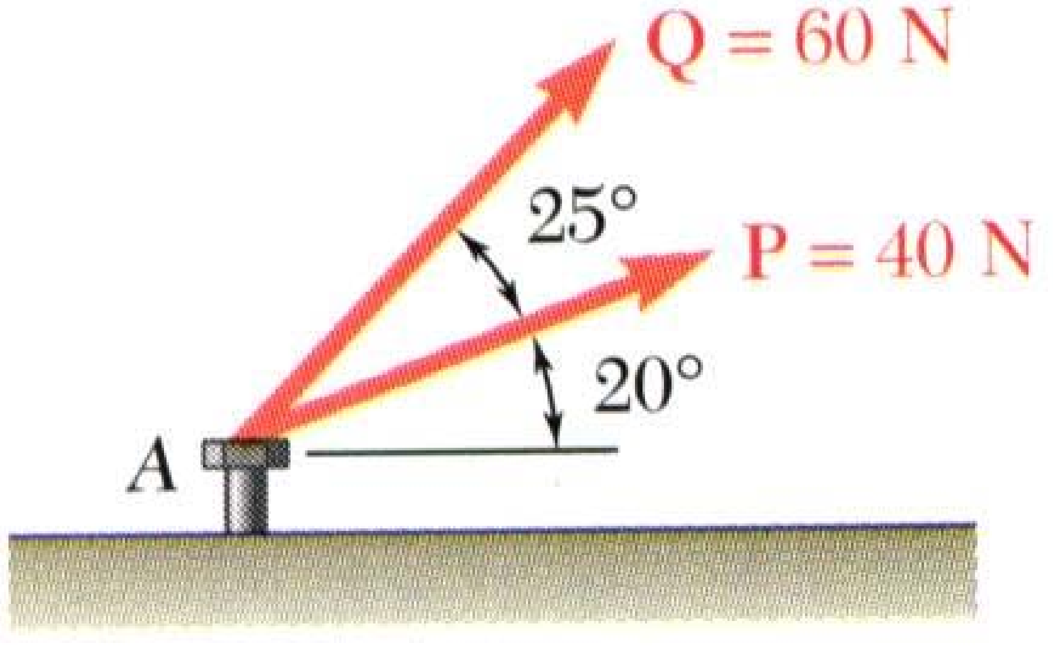
$$\begin{aligned} R_x &= P_x + Q_x + S_x \\ &= \sum F_x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} R_y &= P_y + Q_y + S_y \\ &= \sum F_y \end{aligned}$$

- Se determina el módulo y la dirección de la resultante,

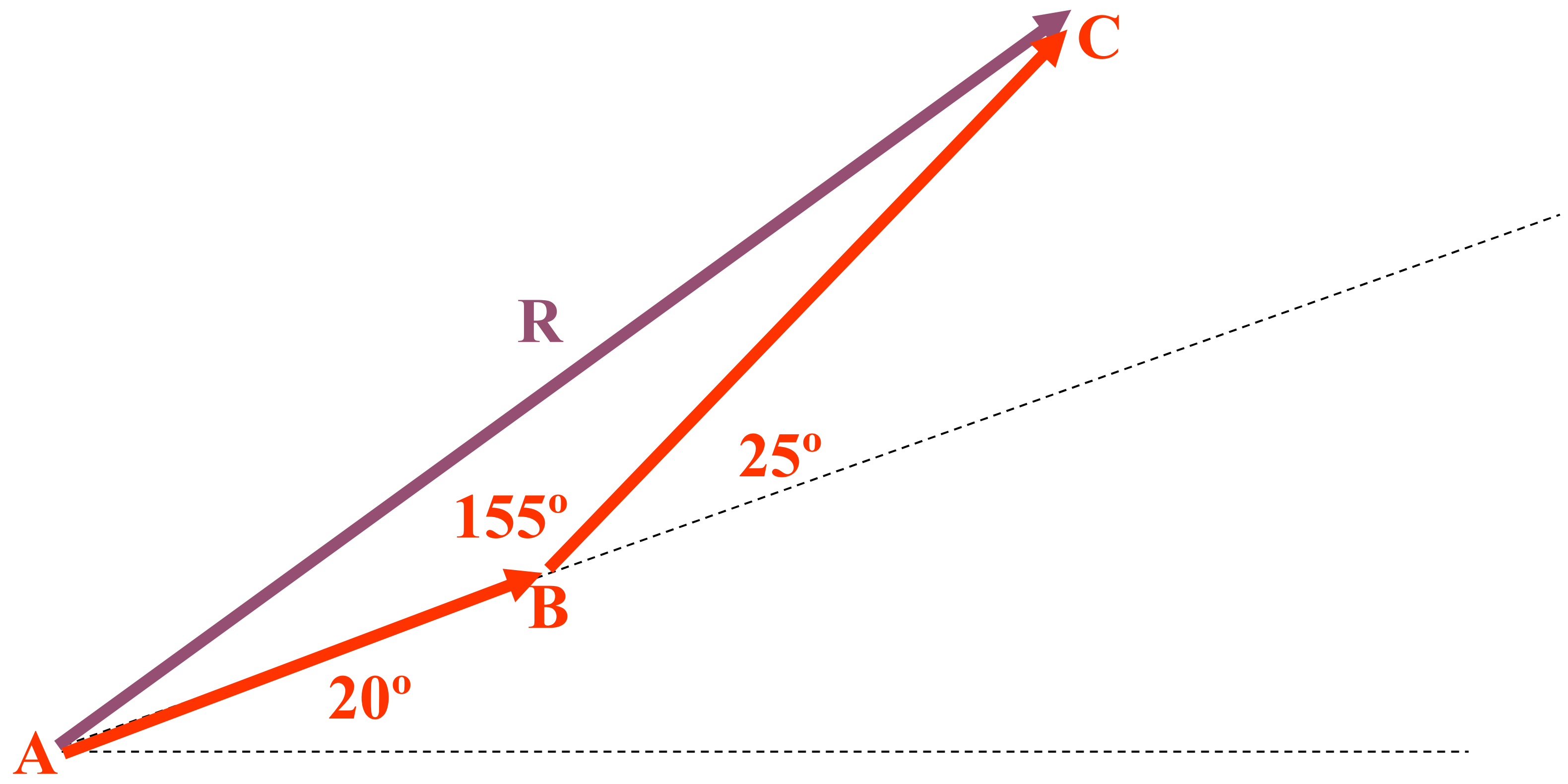
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

Ejemplo Problema 2.1

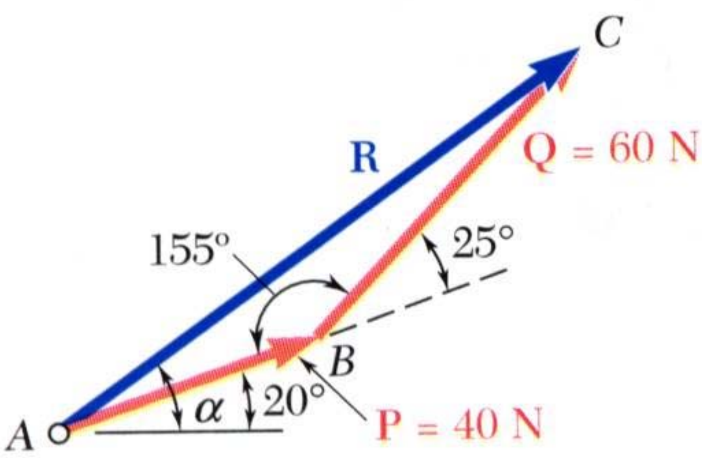
Dos fuerzas actúan sobre un perno en A. Determine su resultante.



Ejemplo Problema 2.1



Ejemplo Problema 2.1



Aplicar la regla del triángulo.

Teorema del coseno

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$
$$= (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155°$$

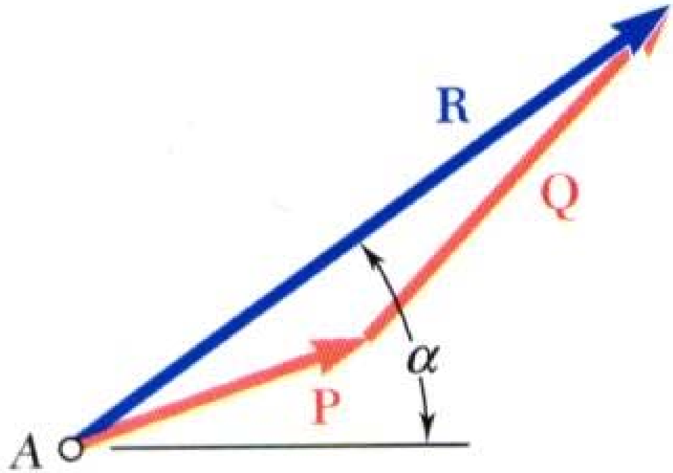
$$\boxed{R = 97.73\text{N}}$$

Teorema del seno,

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$
$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$
$$= \sin 155° \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}}$$
$$A = 15.04°$$
$$\alpha = 20° + A$$

$$\boxed{\alpha = 35.04°}$$

Solución Problema 2.1



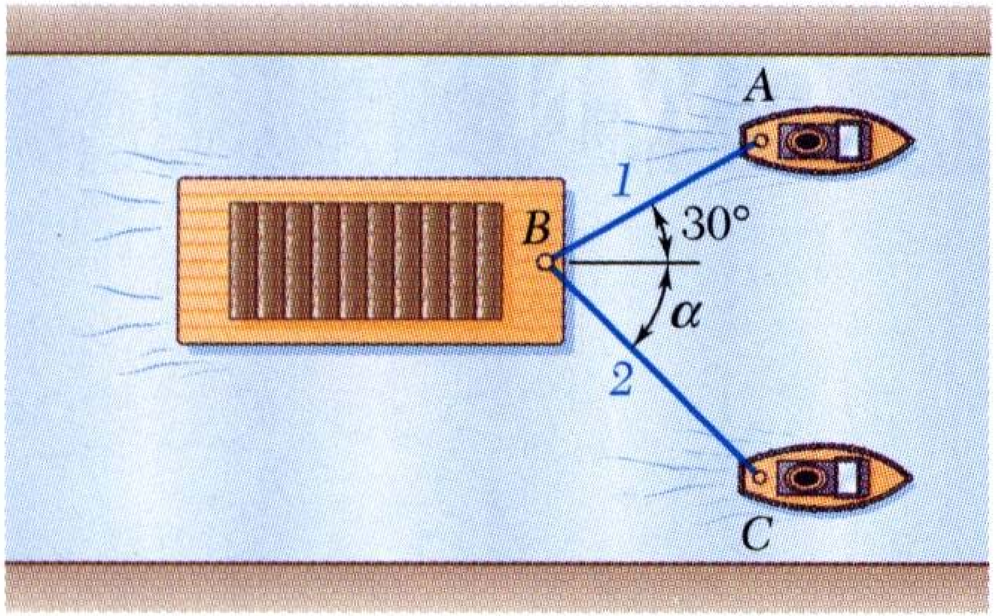
$$\boxed{\mathbf{R} = 98\ \mathrm{N} \quad \alpha = 35°}$$

Ejemplo Problema 2.2

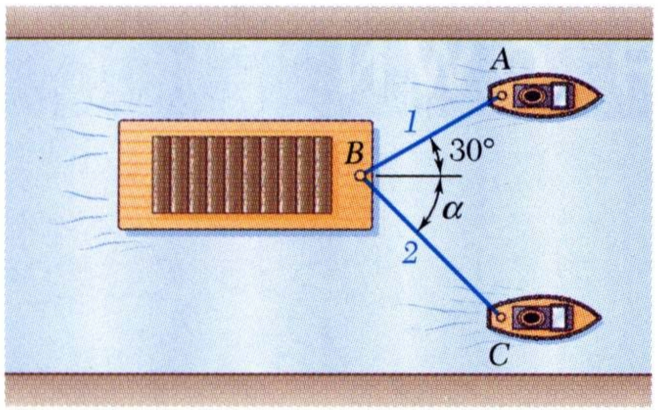
Una barcaza es tirada por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es de 22000 N dirigida a lo largo del eje de la barcaza, determinar:

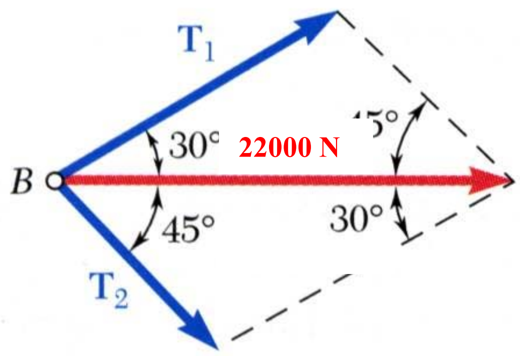
a) La tensión de cada una de las cuerdas si $\alpha = 45^{o}$,

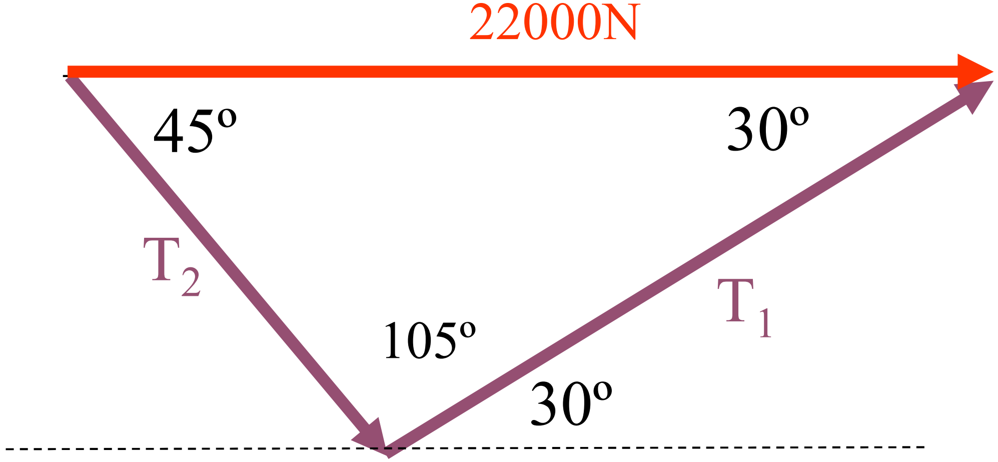
b) El valor de α para el cual la tensión en la cuerda 2 es mínimo



Ejemplo Problema 2.2

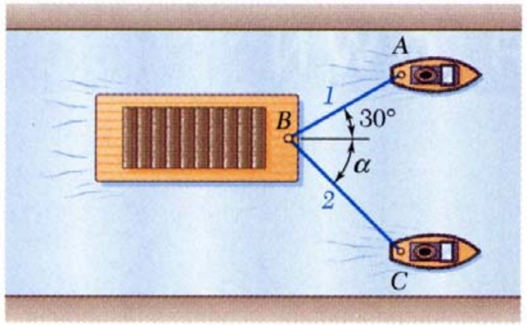




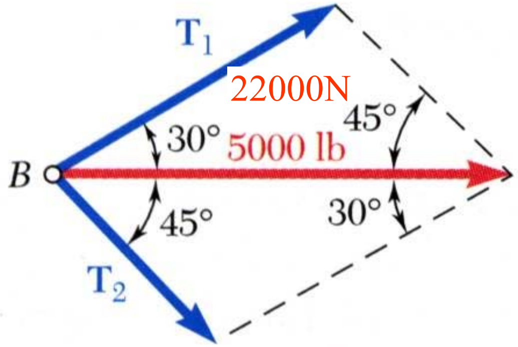


Ejemplo Problema 2.2

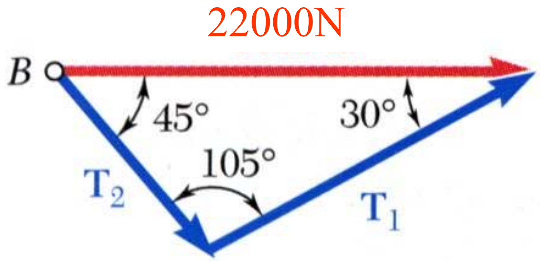
- Regla del triángulo y aplicación del teorema del seno



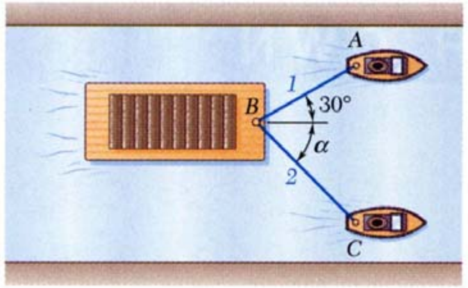
$$\frac{T_1}{\sin 45°} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{22000N}{\sin 105°}$$

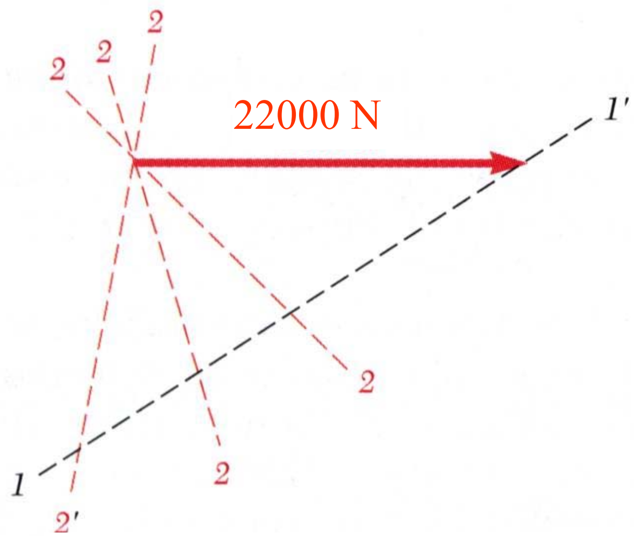


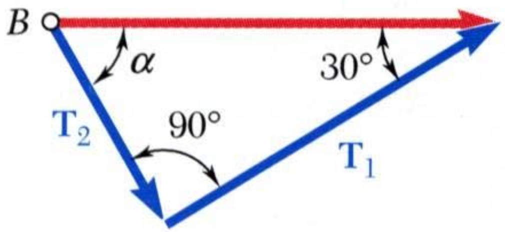
$$\boxed{T_1 = 16105N \quad T_2 = 11388N}$$



Ejemplo Problema 2.2







- El ángulo de mínima tensión en la cuerda 2 se determina mediante la aplicación de la Regla del Triángulo y observar el efecto de las variaciones de α.
- El valor mínimo de $\mathbf{T_2}$ es cuando $\mathbf{T_1}$ y $\mathbf{T_2}$ son perpendiculares.

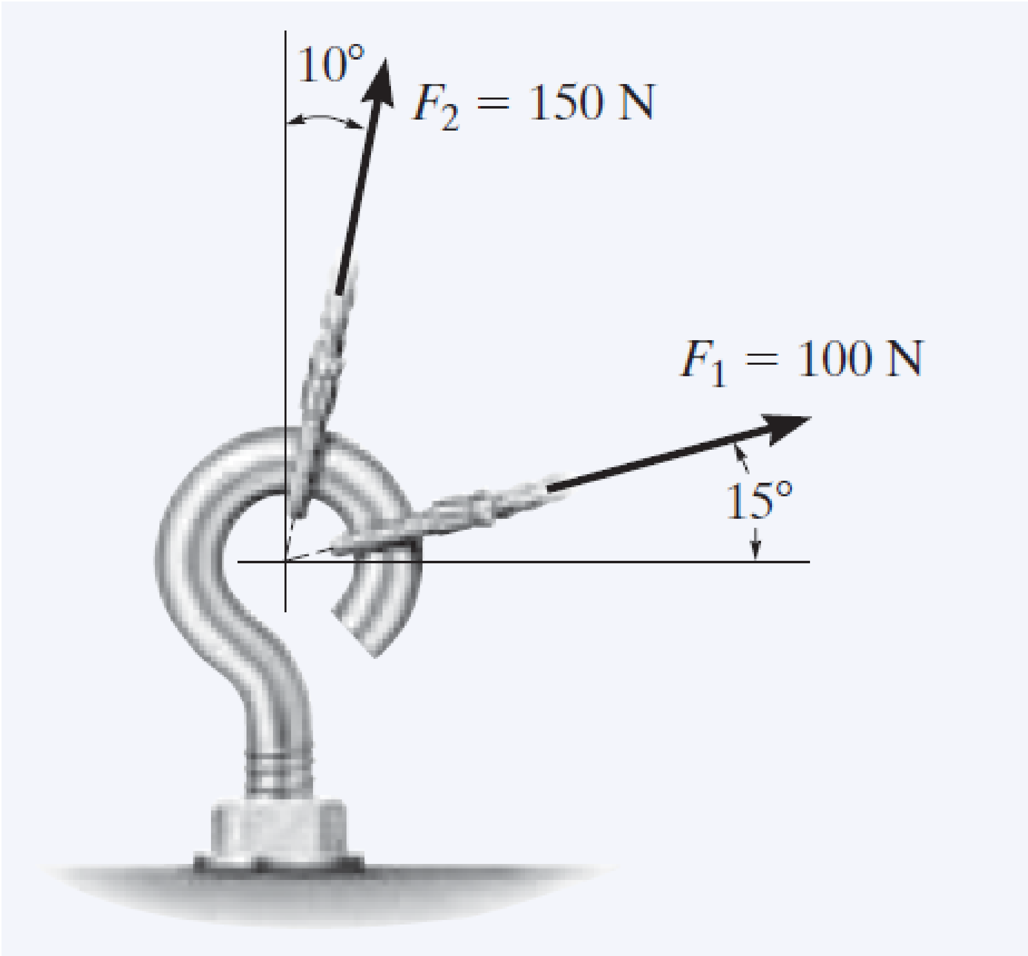
$$T_2 = (22000)\sin 30° \qquad \boxed{T_2 = 11000 N}$$

$$T_1 = (22000)\cos 30° \qquad \boxed{T_1 = 19052 N}$$

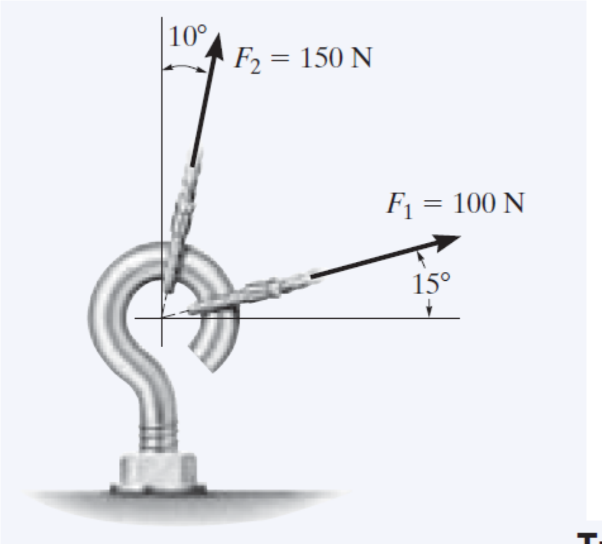
$$\alpha = 90° - 30° \qquad \boxed{\alpha = 60°}$$

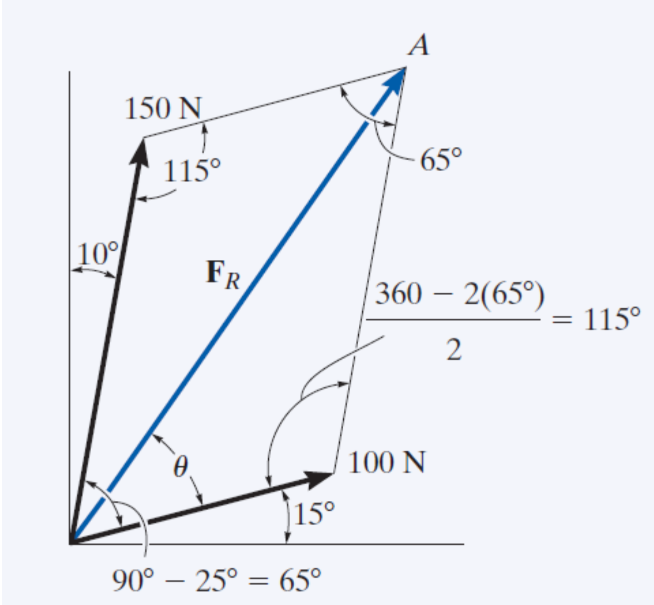
Ejemplo Problema 2.3

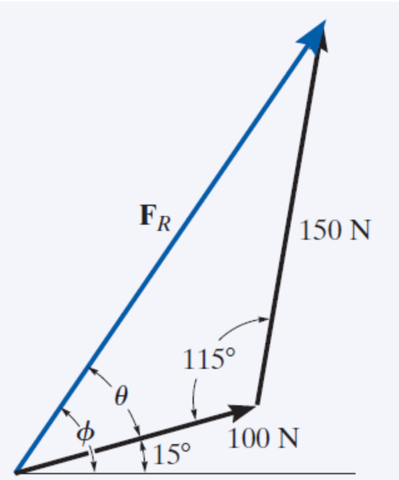
La armella roscada de la figura está sometida a dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.



Ejemplo Problema 2.3







Trigonometría. A partir del paralelogramo, se construye el triángulo vectorial, figura 2-11*c*. Mediante la ley de los cosenos

$$
\begin{aligned}
F_R &= \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115^\circ} \\
&= \sqrt{10\,000 + 22\,500 - 30\,000(-0.4226)} = 212.6\text{ N} \\
&= 213\text{ N}
\end{aligned}
$$

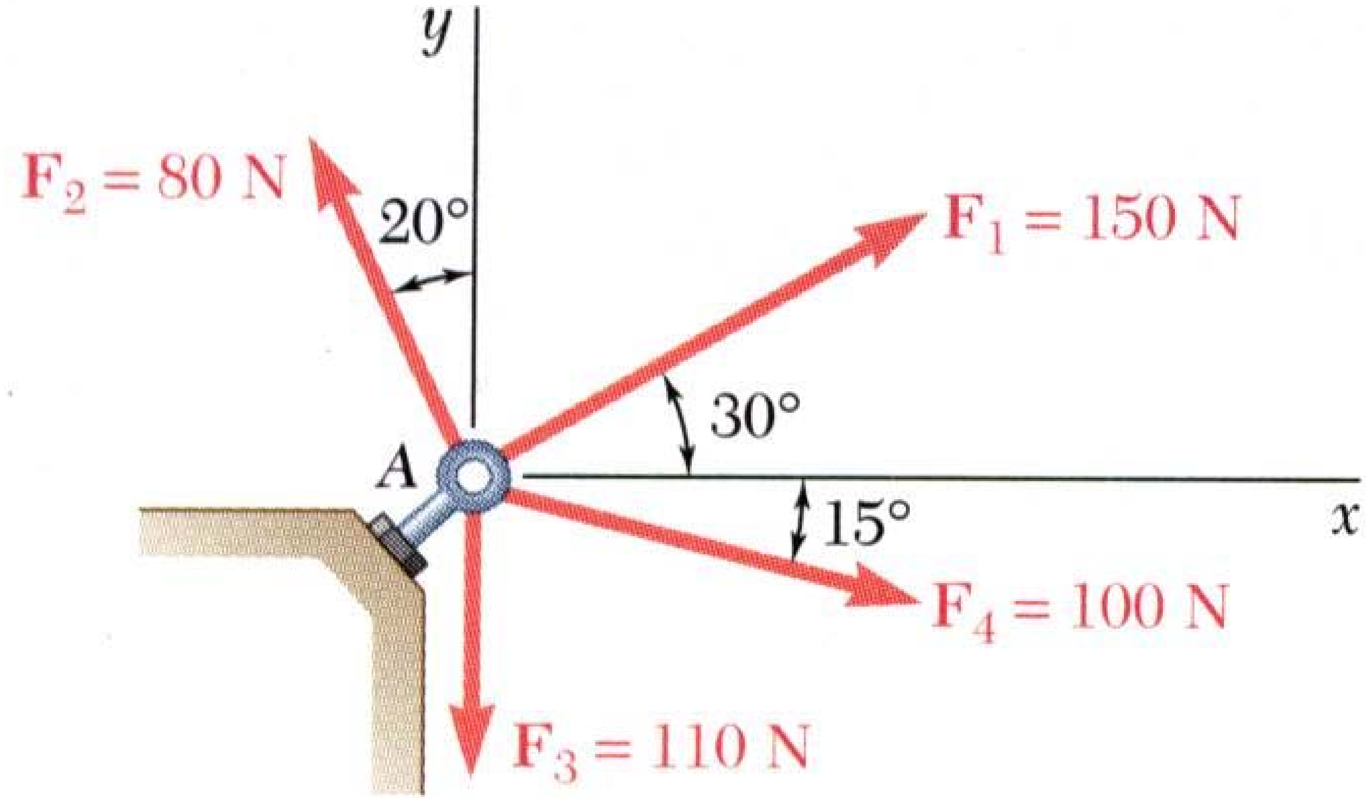
Resp.

El ángulo θ se determina al aplicar la ley de los senos,

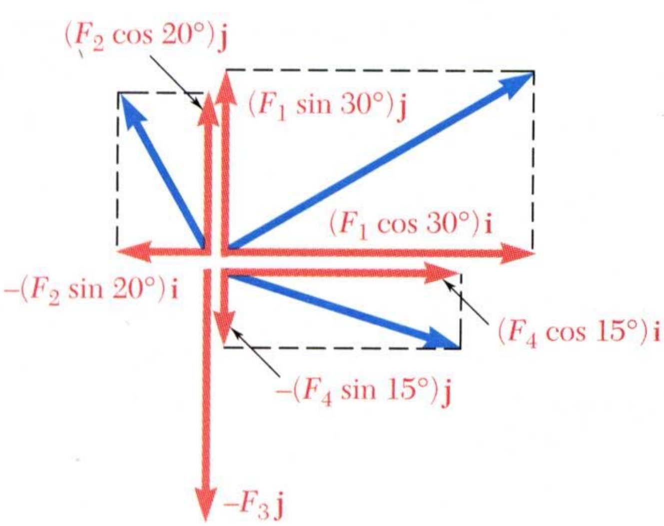
$$\frac{150\text{ N}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{212.6\text{ N}}{\operatorname{sen} 115^\circ} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}}(\operatorname{sen} 115^\circ)$$

$$\theta = 39.8^\circ$$

Ejemplo Problema 2.4



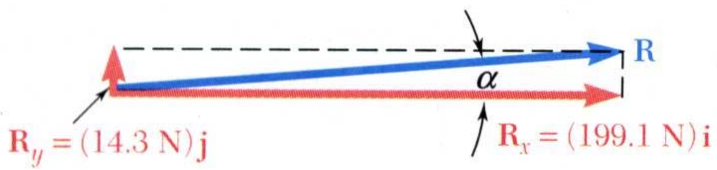
Ejemplo Problema 2.4



SOLUCION:

- Se escriben las componentes de cada fuerza:

Fuerza	*Módulo*	$x-comp$	$y-comp$
$\vec{F}_1$	150	$+129.9$	$+75.0$
$\vec{F}_2$	80	-27.4	$+75.2$
$\vec{F}_3$	110	0	-110.0
$\vec{F}_4$	100	$+96.6$	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$



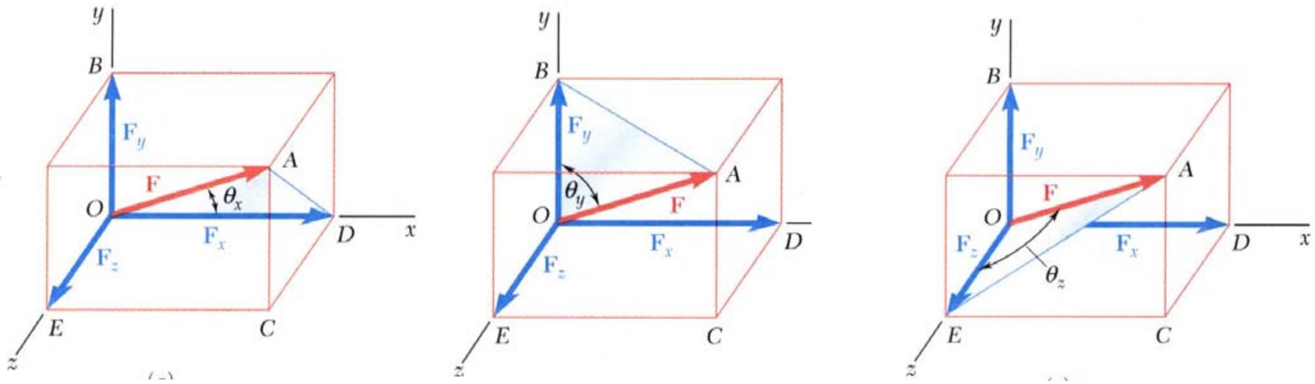
- Determinar los componentes de la resultante sumando los componentes de las fuerzas

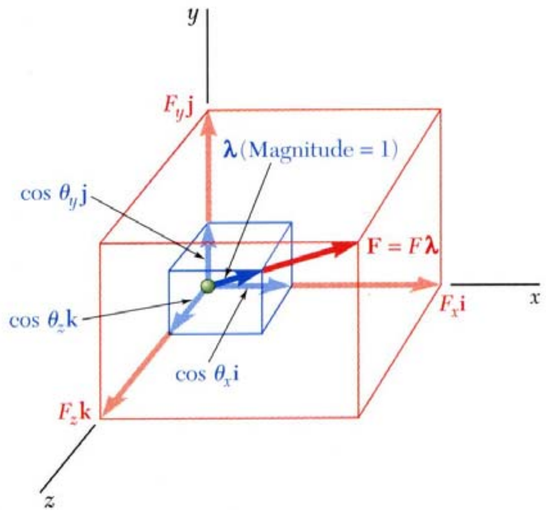
- Se calcula el módulo y la dirección

$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2} \qquad \boxed{R = 199.6\mathrm{N}}$$

$$\tan\alpha = \frac{14.3\,\mathrm{N}}{199.1\,\mathrm{N}} \qquad \boxed{\alpha = 4.1°}$$

Componentes Rectangulares en el espacio





- Con los ángulos entre $\vec{F}$ y los tres ejes,

$$F_x = F\cos\theta_x \quad F_y = F\cos\theta_y \quad F_z = F\cos\theta_z$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\\ &= F\left(\cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}\right)\\ &= F\vec{\lambda}\end{aligned}$$

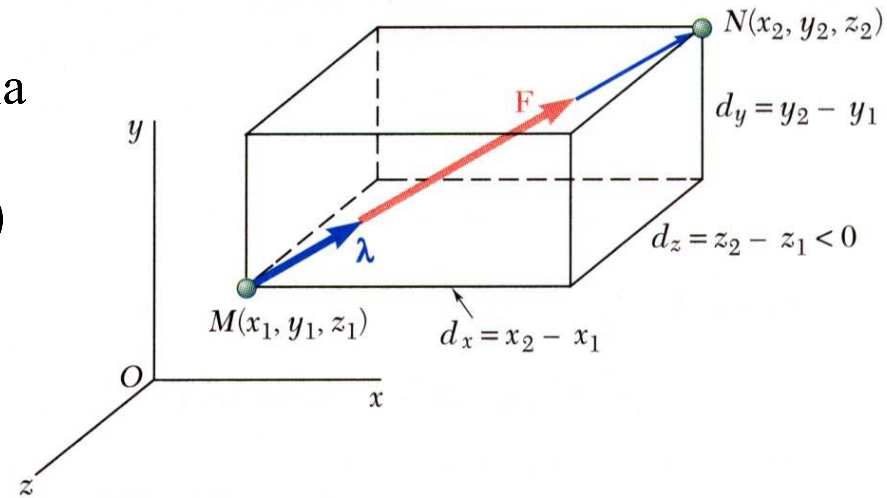
$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\vec{i} + \cos\theta_y\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$

- $\vec{\lambda}$ es un vector unitario a lo largo de la dirección de la fuerza $\vec{F}$ y $\cos\theta_x, \cos\theta_y,$ y $\cos\theta_z$ son los cosenos directores $\vec{F}$

Componentes rectangulares en el espacio

La dirección de la fuerza se define por la ubicación de dos puntos ,

$M\,(x_1, y_1, z_1)$ and $N\,(x_2, y_2, z_2)$



$$\vec{d} = \text{vector que une } M \text{ y } N$$
$$= d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$

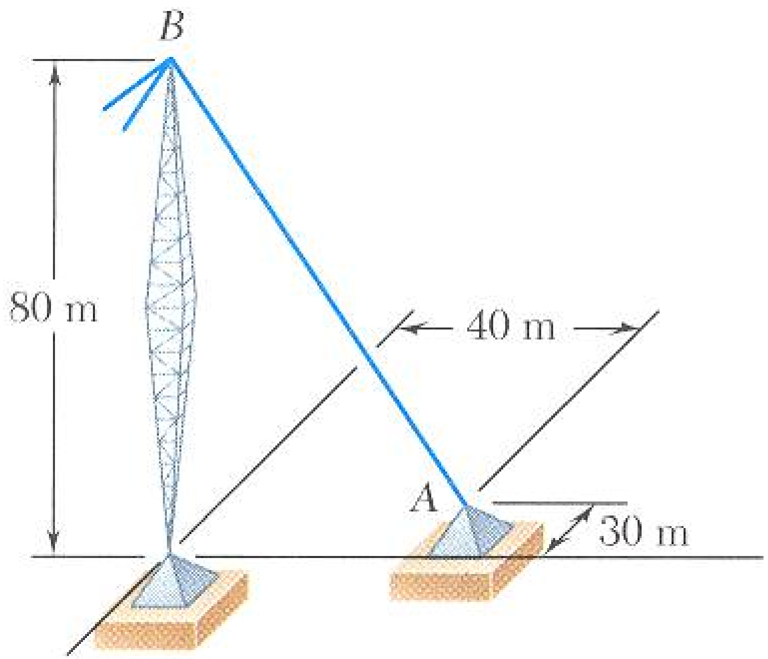
$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{1}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$$

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d}$$

Ejemplo Problema 2.5

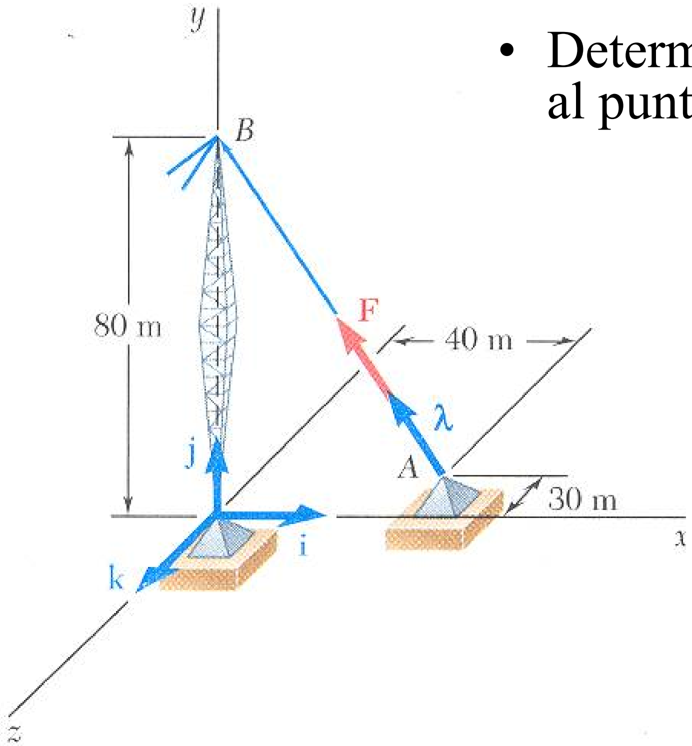


La tensión en el alambre es 2500 N. Determine:

a) componentes F_x, F_y, F_z de la fuerza en el perno A,

b) Los ángulos θ_x, θ_y, θ_z que dan la dirección de la fuerza

Ejemplo Problema 2.6



SOLUCION:

- Determinamos el vector unitario que va desde el punto A al punto *B*.

$$\overrightarrow{AB} = (-40\,\mathrm{m})\vec{i} + (80\,\mathrm{m})\vec{j} + (30\,\mathrm{m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\,\mathrm{m})^2 + (80\,\mathrm{m})^2 + (30\,\mathrm{m})^2}$$

$$= 94.3\,\mathrm{m}$$

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k}$$

$$= -0.424\,\vec{i} + 0.848\,\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

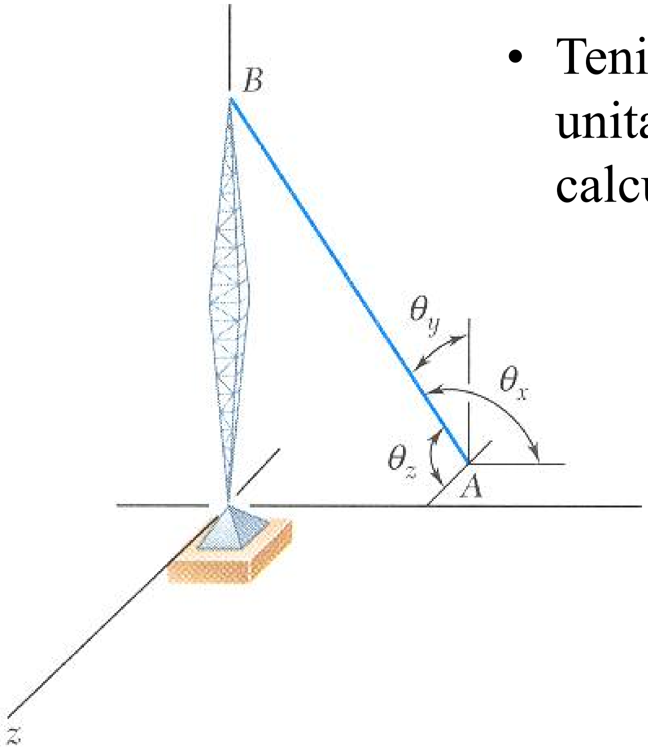
- Cálculo de las componentes de la fuerza.

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}$$

$$= (2500\,\mathrm{N})\left(-0.424\,\vec{i} + 0.848\,\vec{j} + 0.318\vec{k}\right)$$

$$= (-1060\,\mathrm{N})\vec{i} + (2120\,\mathrm{N})\vec{j} + (795\,\mathrm{N})\vec{k}$$

Ejemplo Problema 2.5



- Teniendo en cuenta que las componentes del vector unitario son los cosenos directores del vector, calculamos los ángulos correspondientes .

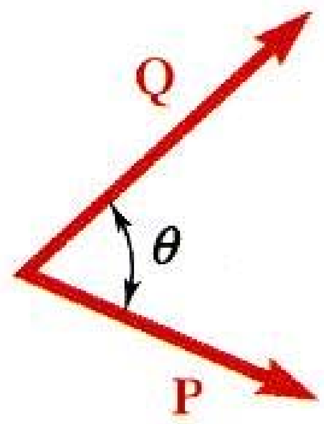
$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x \vec{i} + \cos\theta_y \vec{j} + \cos\theta_z \vec{k}$$
$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_x &= 115.1^\circ \\ \theta_y &= 32.0^\circ \\ \theta_z &= 71.5^\circ \end{aligned}}$$

Producto escalar de dos vectores

- El producto escalar o producto punto entre dos vectores P y Q se define como

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ\cos\theta \quad (\text{un número})$$



- Productos escalares:
  - Son conmutativos, $\vec{P} \bullet \vec{Q} = \vec{Q} \bullet \vec{P}$
  - Son distributivos, $\vec{P} \bullet \left(\vec{Q}_1 + \vec{Q}_2\right) = \vec{P} \bullet \vec{Q}_1 + \vec{P} \bullet \vec{Q}_2$
  - No son asociativos, $\left(\vec{P} \bullet \vec{Q}\right) \bullet \vec{S} = \text{ indefinido}$

- Productos escalares en componentes unitarios cartesianos,

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = \left(P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}\right) \bullet \left(Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k}\right)$$

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = 1 \quad \vec{j} \bullet \vec{j} = 1 \quad \vec{k} \bullet \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \bullet \vec{j} = 0 \quad \vec{j} \bullet \vec{k} = 0 \quad \vec{k} \bullet \vec{i} = 0$$

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

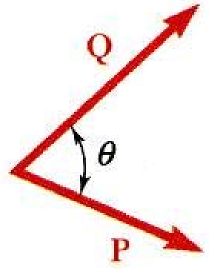
$$\vec{P} \bullet \vec{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$$

Producto escalar de dos vectores: Aplicaciones

- Ángulo entre dos vectores:

$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\cos\theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ}$$

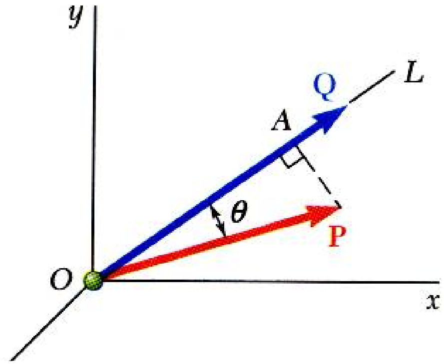


- Proyección de un vector sobre un eje dado :

$$P_{OL} = P\cos\theta = \text{proyeccion de } P \text{ a lo largo de } OL$$

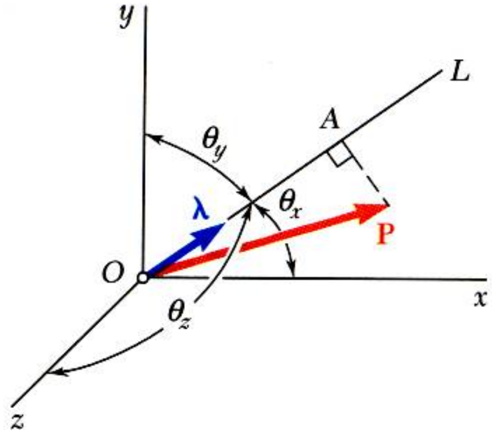
$$\vec{P} \bullet \vec{Q} = PQ\cos\theta$$

$$\frac{\vec{P} \bullet \vec{Q}}{Q} = P\cos\theta = P_{OL}$$



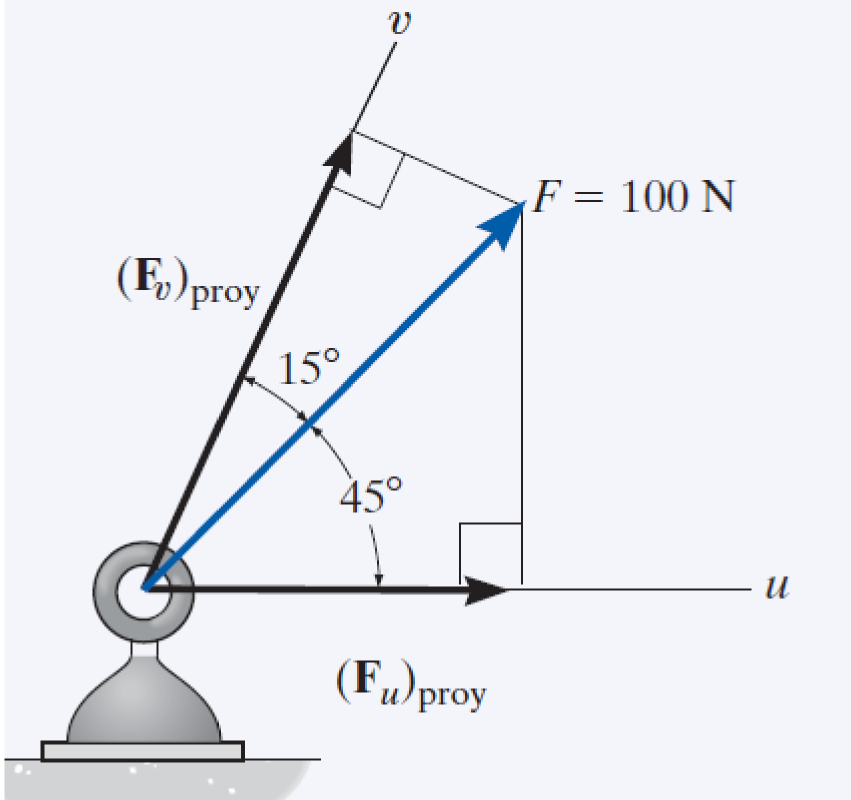
- Para un eje definido por un vector unitario:

$$P_{OL} = \vec{P} \bullet \vec{\lambda}$$
$$= P_x \cos\theta_x + P_y \cos\theta_y + P_z \cos\theta_z$$



Ejemplo Problema 2.6

Determine las magnitudes de la proyección de la fuerza **F** en la figura sobre los ejes *u* y v.

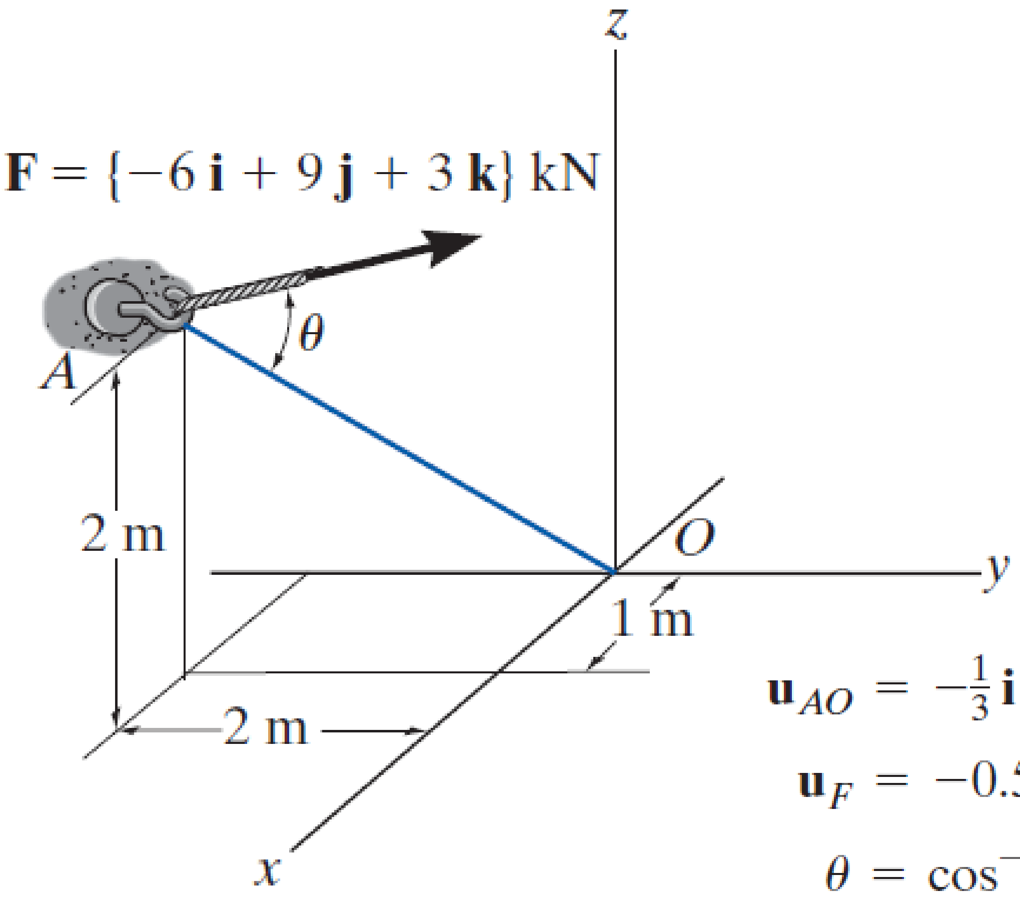


$$(F_u)_{\text{proy}} = (100 \text{ N})\cos 45^\circ = 70.7 \text{ N}$$

$$(F_v)_{\text{proy}} = (100 \text{ N})\cos 15^\circ = 96.6 \text{ N}$$

Ejemplo Problema 2.7

Determine el ángulo ϴ entre la fuerza y la línea *AO*.



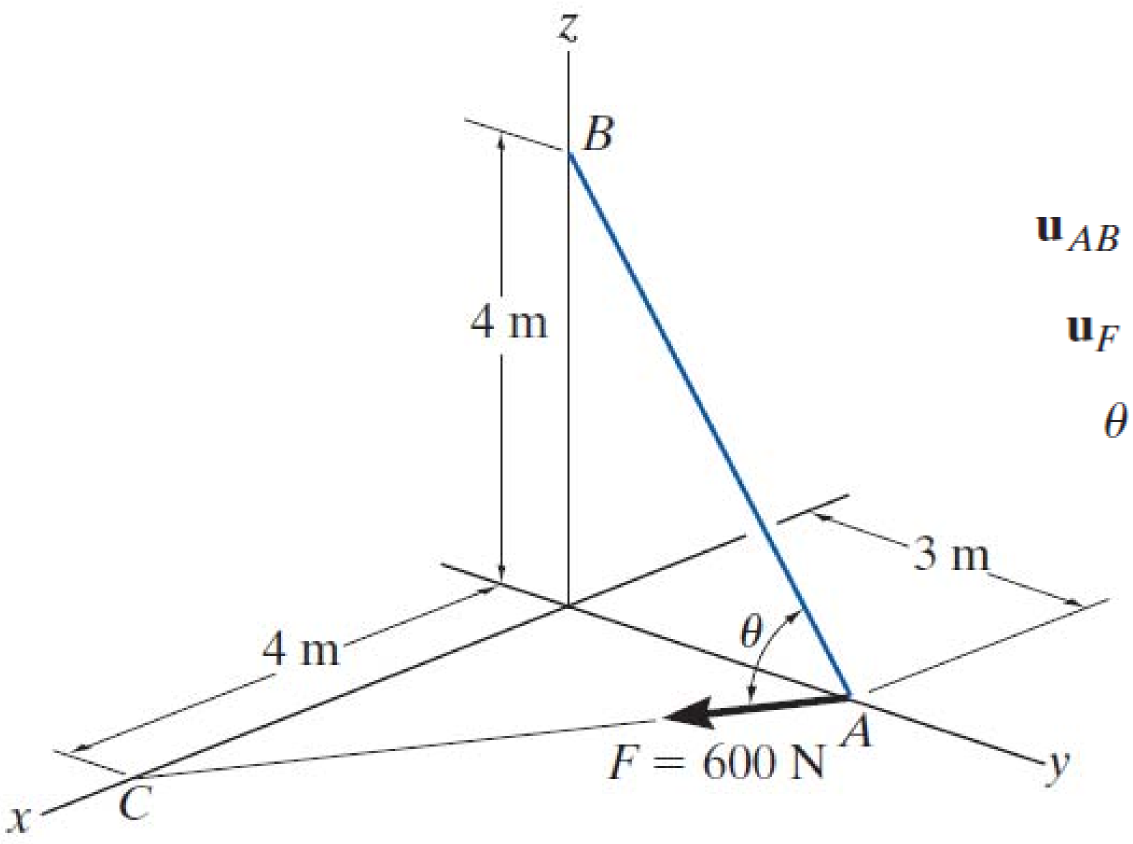
$$\mathbf{u}_{AO} = -\tfrac{1}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} - \tfrac{2}{3}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_F = -0.5345\mathbf{i} + 0.8018\mathbf{j} + 0.2673\mathbf{k}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u}_{AO} \cdot \mathbf{u}_F) = 57.7^\circ$$

Ejemplo Problema 2.8

Determine el ángulo Ɵ entre la fuerza y la línea *AB*.



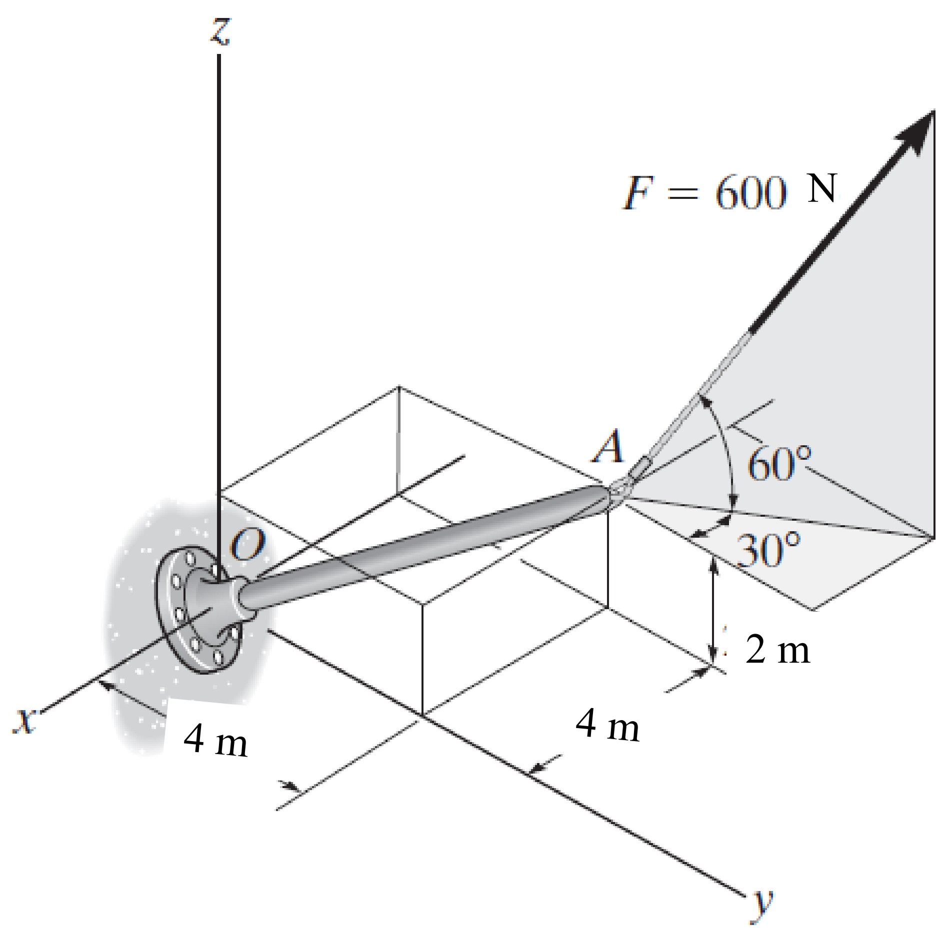
$$\mathbf{u}_{AB} = -\tfrac{3}{5}\mathbf{j} + \tfrac{4}{5}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{u}_F = \tfrac{4}{5}\mathbf{i} - \tfrac{3}{5}\mathbf{j}$$

$$\theta = \cos^{-1}(\mathbf{u}_{AB} \cdot \mathbf{u}_F) = 68.9^\circ$$

Ejemplo Problema 2.9

Determine las componentes de la fuerza que actúan en forma paralela y perpendicular al eje del poste.



Solución Problema 2.9

$$\mathbf{F} = [(-600 \text{ N}) \cos 60°] \operatorname{sen} 30° \mathbf{i}$$
$$+ [(600 \text{ N}) \cos 60°] \cos 30° \mathbf{j}$$
$$+ [(600 \text{ N}) \operatorname{sen} 60°] \mathbf{k}$$
$$= \{-150\mathbf{i} + 259.81\mathbf{j} + 519.62\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{u}_A = -\tfrac{2}{3}\mathbf{i} + \tfrac{2}{3}\mathbf{j} + \tfrac{1}{3}\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{F}_A)_{\text{proy}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_A = 446.41 \text{ N} = 446 \text{ N}$$

$$(\mathbf{F}_A)_{\text{per}} = \sqrt{(600 \text{ N})^2 - (446.41 \text{ N})^2}$$
$$= 401 \text{ N}$$