UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

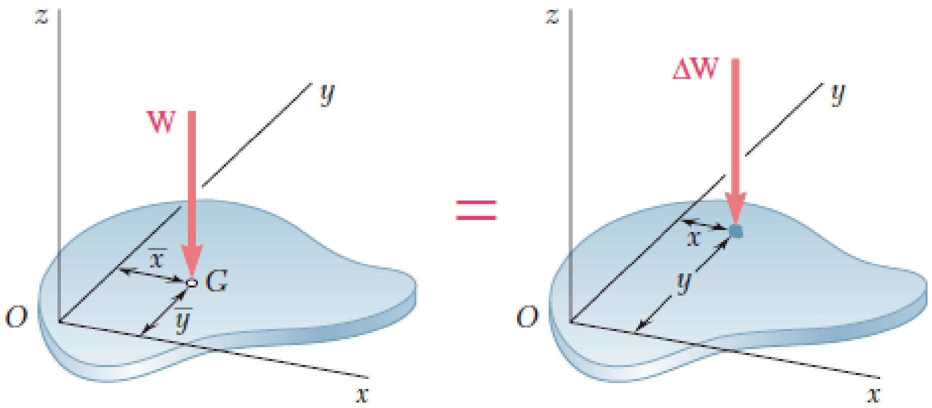
Física I Geometría de masas. Tema7

Objetivos

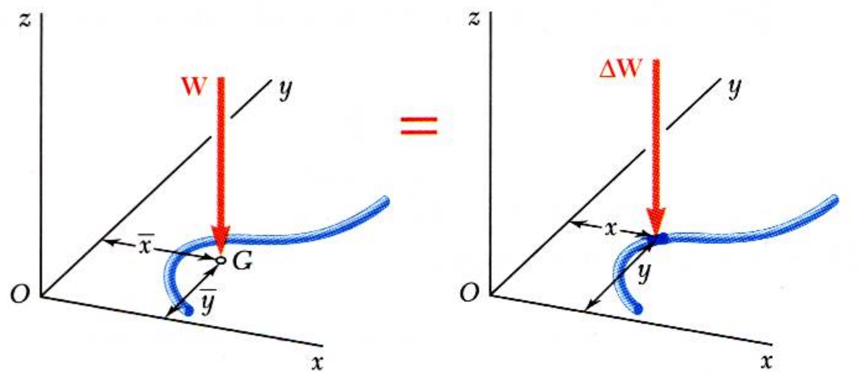
- Analizar los conceptos de centro de gravedad, centro de masa y centroide.
- Mostrar cómo se determina la ubicación del centro de gravedad y el centroide para un sistema de partículas discretas y un cuerpo de forma arbitraria.
- Utilizar los teoremas de Pappus y Guldinus para encontrar el área superficial y el volumen de un cuerpo que tiene simetría axial.
- Desarrollar un método para determinar el momento de inercia para un área.
- Introducir el producto de inercia y mostrar cómo se determinan los momentos de inercia máximo y mínimo para un área.

Centro de Gravedad de un cuerpo bidimensional

- Centro de gravedad de una placa



- Centro de gravedad de un alambre



$$\sum M_y \quad \bar{x}W = \sum x \Delta W$$

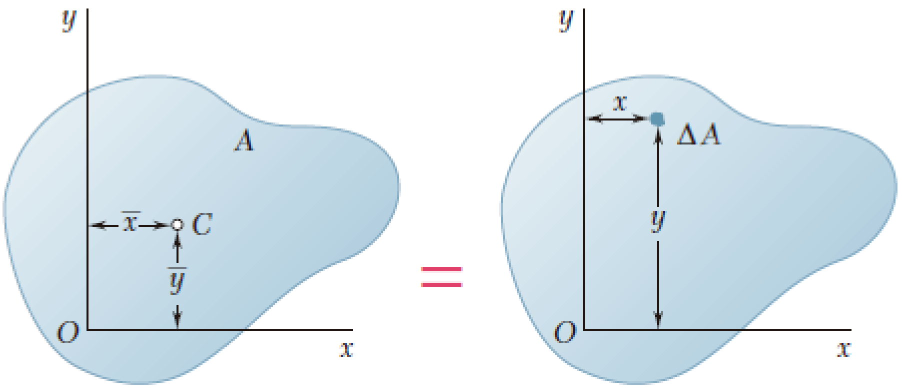
$$= \int x \, dW$$

$$\sum M_y \quad \bar{y}W = \sum y \Delta W$$

$$= \int y \, dW$$

Centroides y Primeros Momentos de Áreas y Líneas

- Centroide de un área



$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

$$\bar{x}(\gamma At) = \int x(\gamma t)dA$$

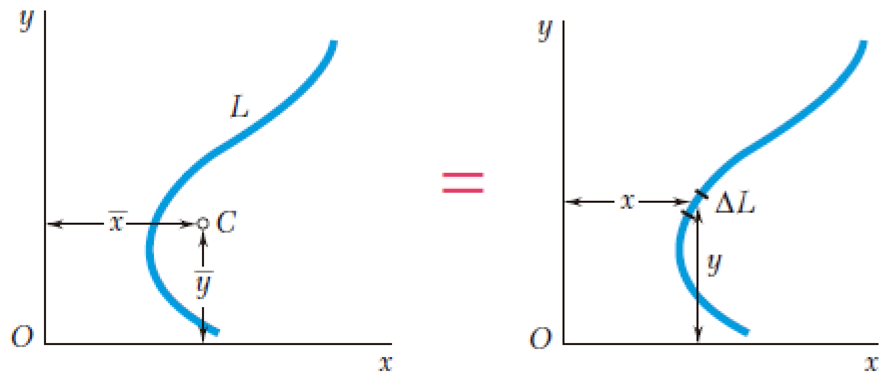
$$\bar{x}A = \int x\,dA = Q_y$$

$$= \text{primer momento respecto al eje } y$$

$$\bar{y}A = \int y\,dA = Q_x$$

$$= \text{primer momento respecto al eje } x$$

- Centroide de una línea



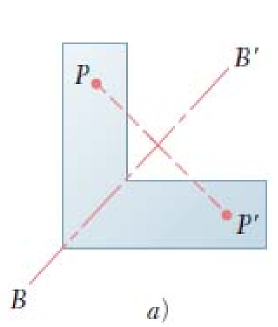
$$\bar{x}W = \int x\,dW$$

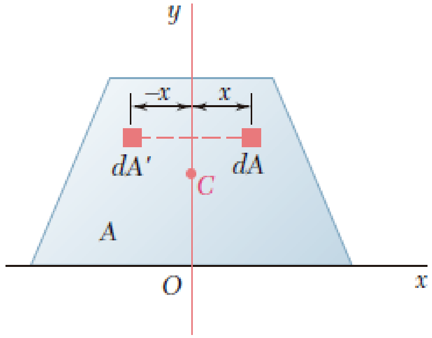
$$\bar{x}(\gamma La) = \int x(\gamma a)dL$$

$$\bar{x}L = \int x\,dL$$

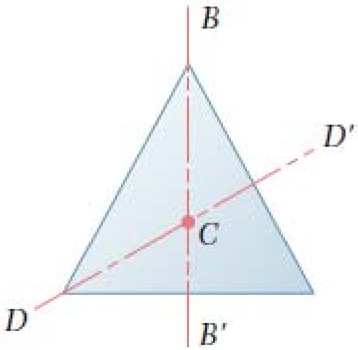
$$\bar{y}L = \int y\,dL$$

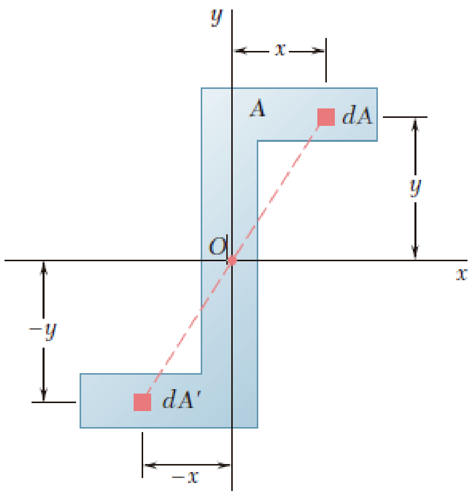
Primeros Momentos de Áreas y Líneas





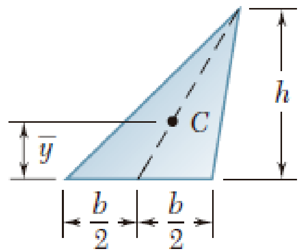
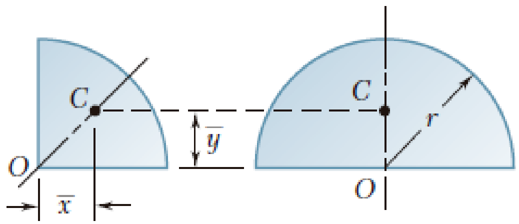
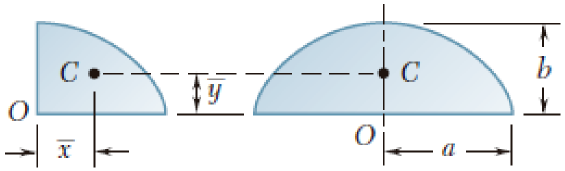
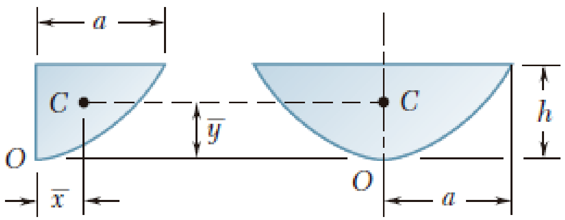
Un área es simétrica con respecto a un eje BB´si para cada punto P existe u punto P´tal que PP´sea perpéndicular a BB´y BB´divide en dos partes iguales el área.



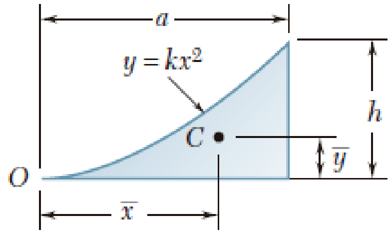
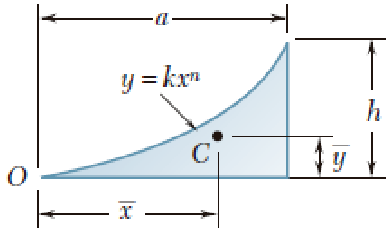
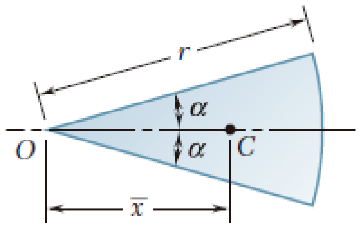


- El primer momento de un área respecto a una línea de simetría es cero
- Si un área tiene una línea de simetría su centroide está en esa línea.
- Si un área posee dos líneas de simetría, el centroide está en la intersección de dichas líneas.
- Un área es simétrica respecto al centro *O* si para cada elemento *dA* situado en (*x*,*y*) existe un elemento *dA’* de igual área situado en (-*x*,-*y*).
- El centroide de un área coincide con el centro de simetria.

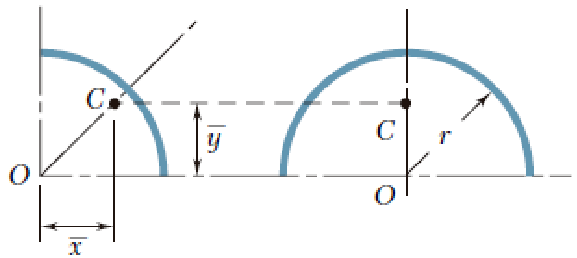
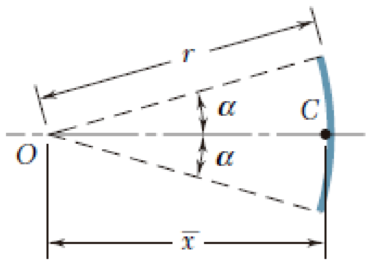
Centroides de áreas comunes

Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Un cuarto de área elíptica		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Área semielíptica		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

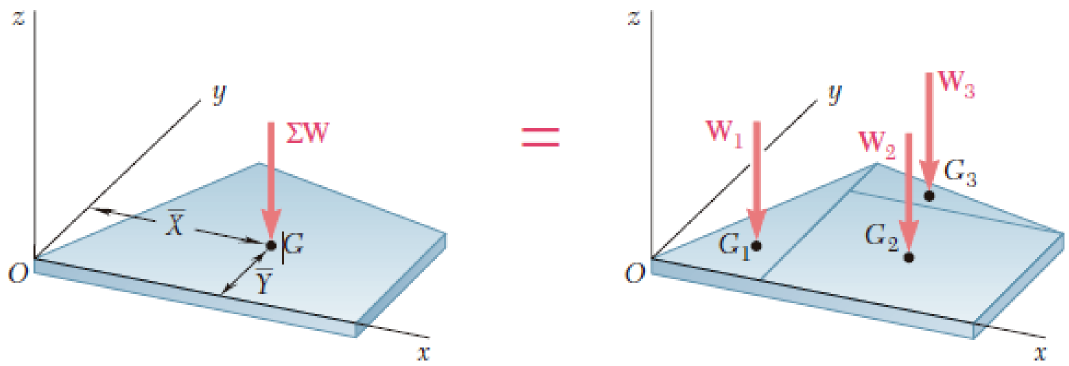
Centroides de áreas comunes

Enjuta parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Enjuta general		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
Sector circular		$\frac{2r \text{ sen } \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

Centroides de líneas comunes

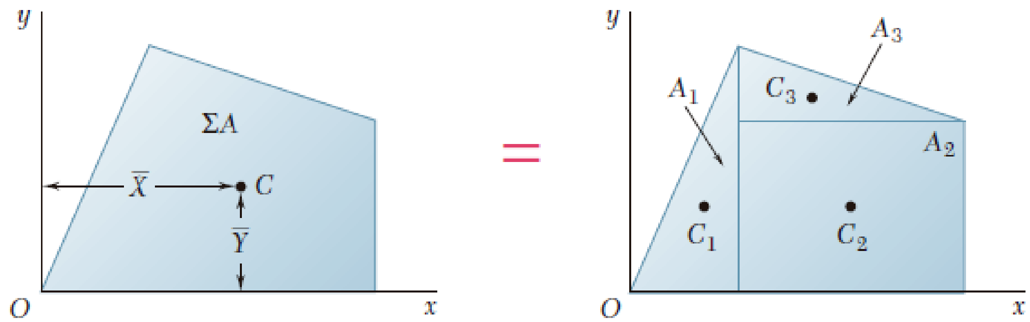
Forma		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Longitud
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Placas compuestas y alambres



- Placa compuesta

$$\bar{X}\sum W = \sum \bar{x} W_i$$
$$\bar{Y}\sum W = \sum \bar{y} W_i$$

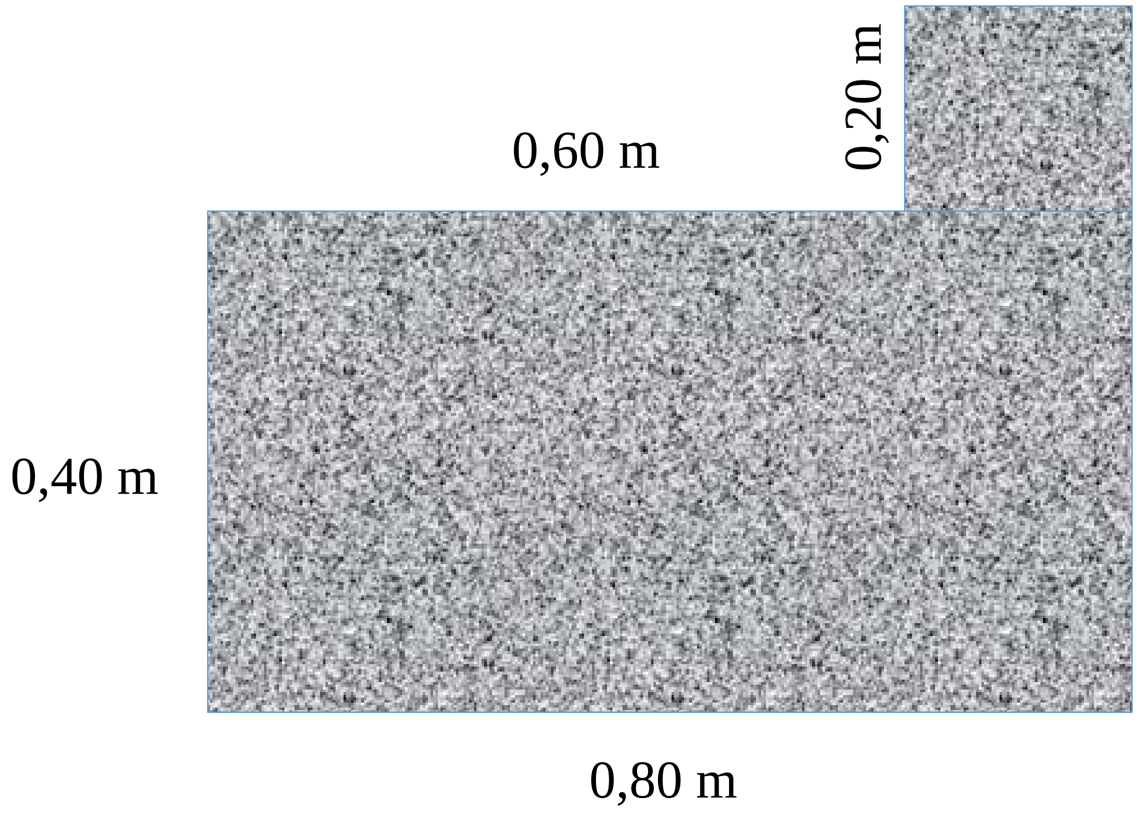


- Área compuesta

$$\bar{X}\sum A = \sum \bar{x}_i A_i$$
$$\bar{Y}\sum A = \sum \bar{y}_i A_i$$

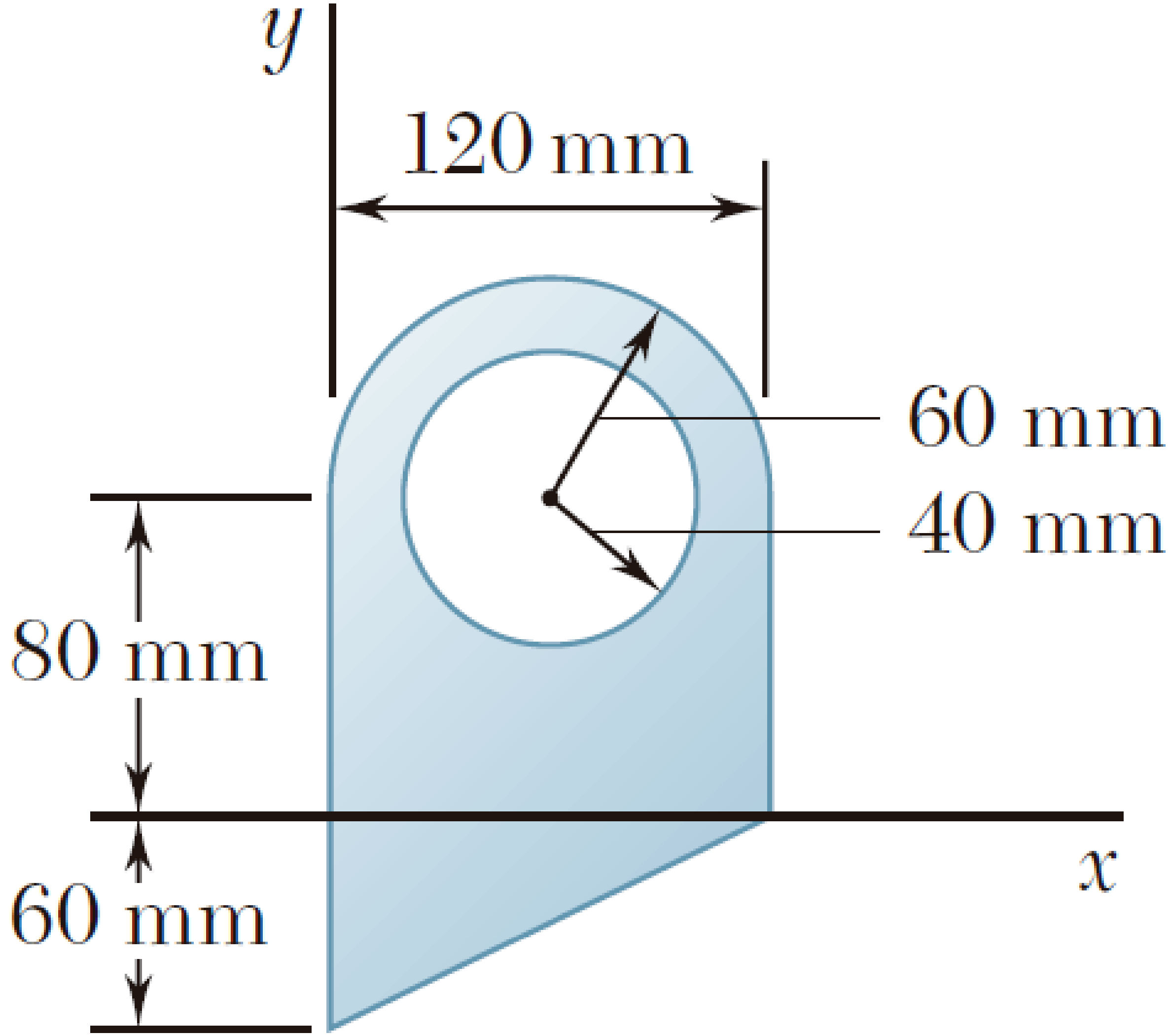
Ejercicio propuesto 7.1

Determinar el centroide de la chapa de la figura.

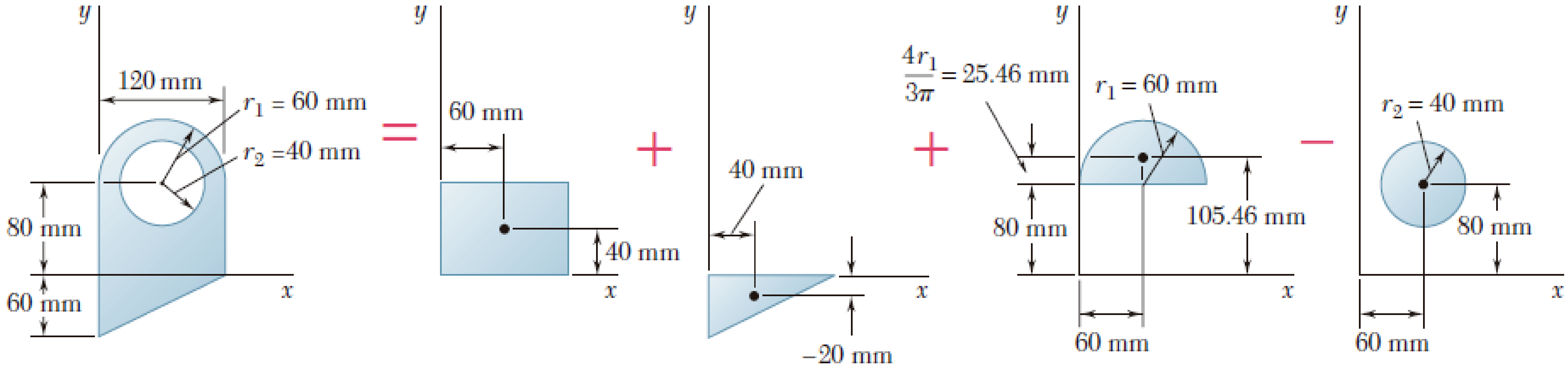


Solución: X=0,43 m ; Y=0,23 m

Problema ejemplo 7.1



Problema ejemplo 5.1



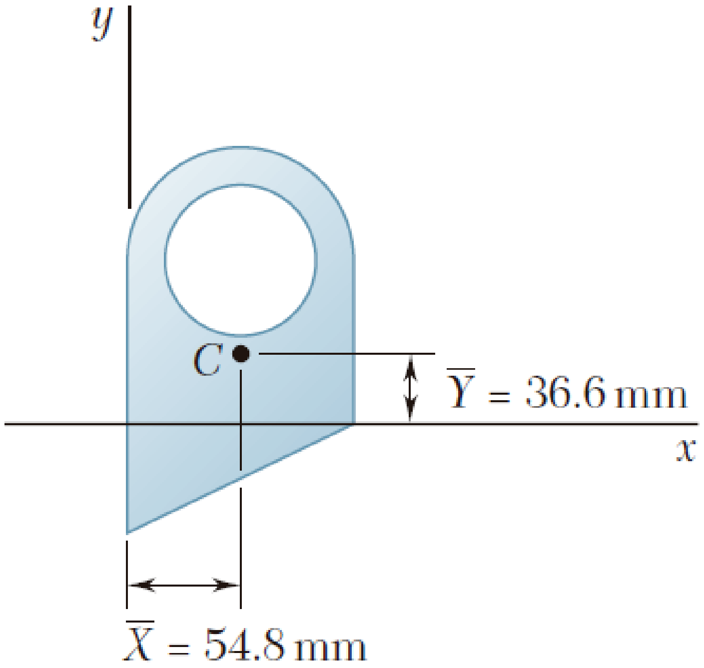
Componente	A, mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triángulo	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	−20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicírculo	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Círculo	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

- El área total se determina sumando (círculo área negativa) cada una de las áreas de las formas que constituyen la placa.

$$Q_x = +506.2 \times 10^3\,\text{mm}^3$$
$$Q_y = +757.7 \times 10^3\,\text{mm}^3$$

Problema ejemplo 7.1

- Las coordenadas del centroide se calculan dividiendo los primeros momentos por el área del área compuesta.



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{+757.7\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

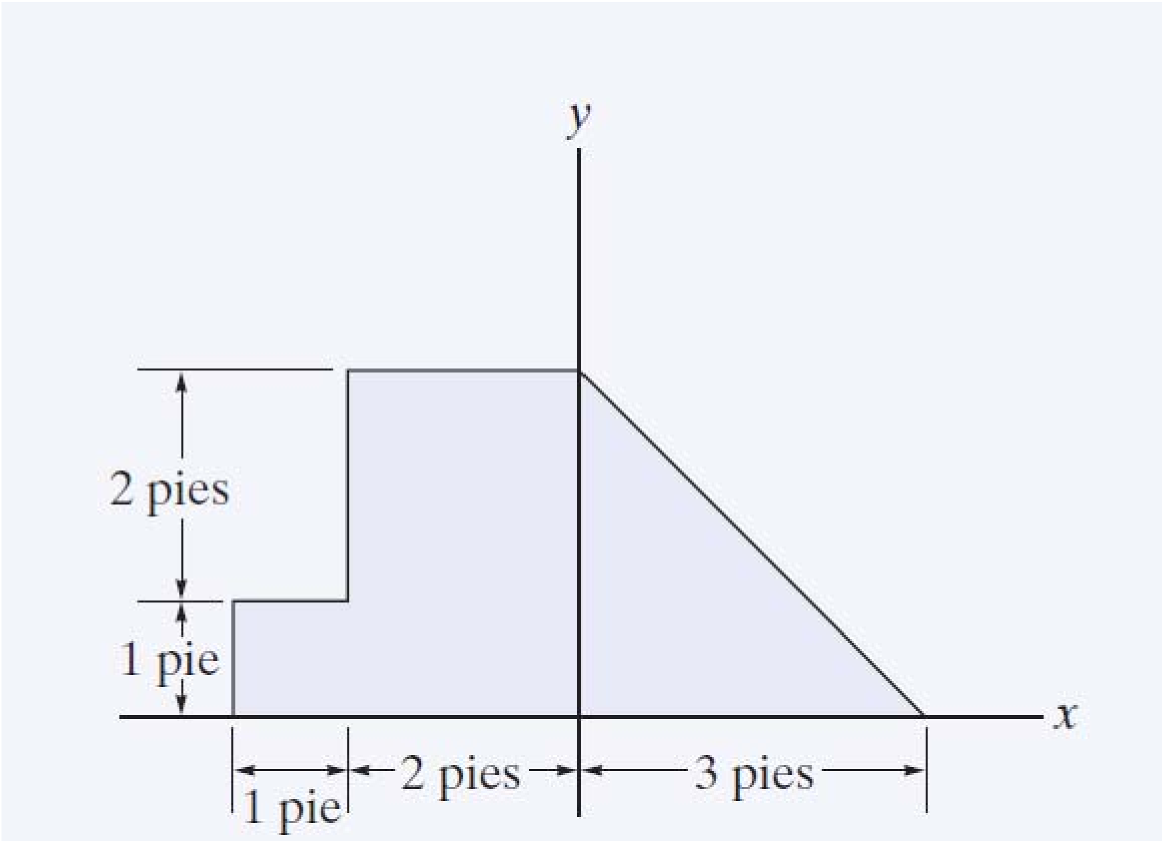
$$\boxed{\bar{X} = 54.8\,\text{mm}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i} = \frac{+506.2\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{Y} = 36.6\,\text{mm}}$$

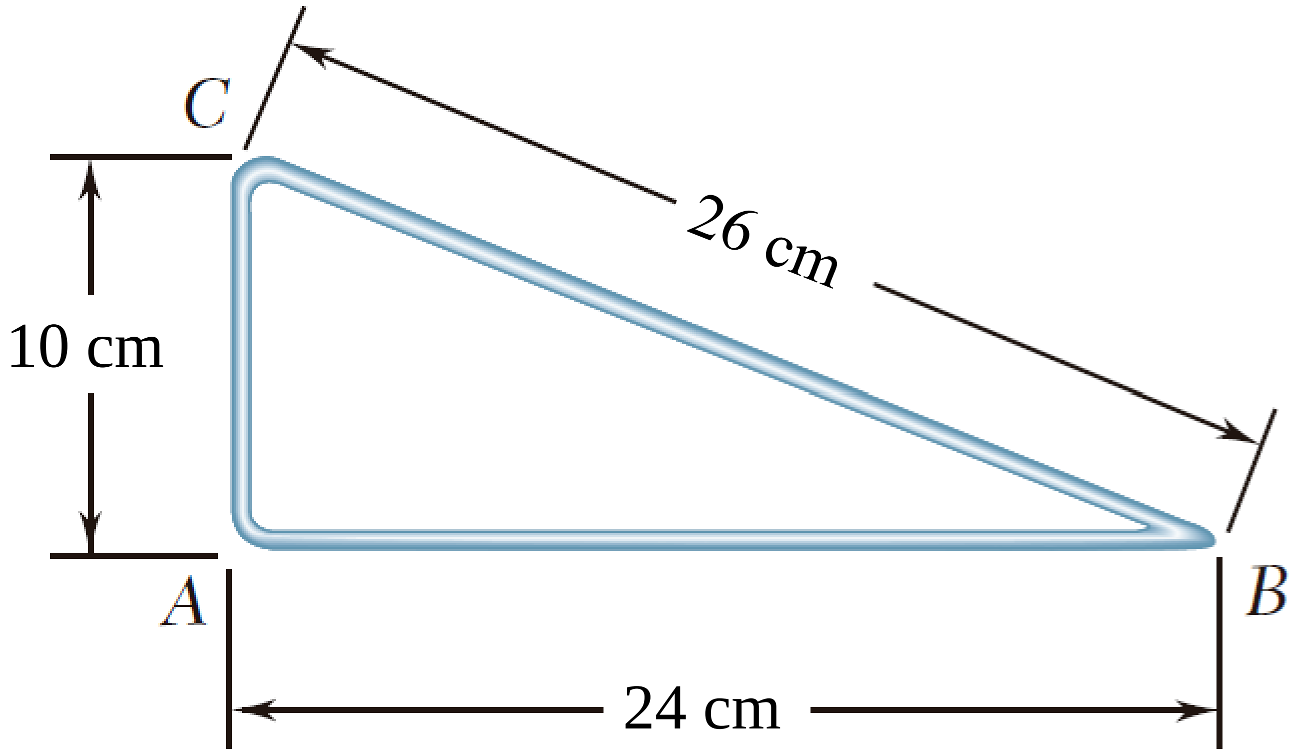
Ejercicio propuesto 7.2

Determine el centroide del área de la placa que se muestra en la figura.

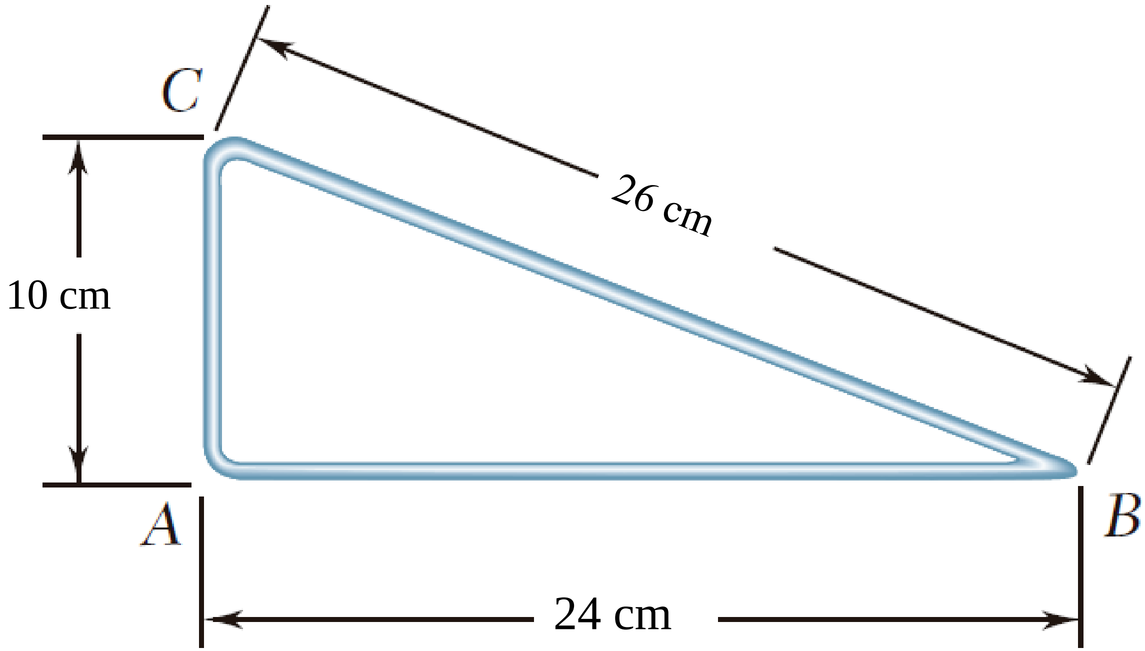


Problema ejemplo 7.2

La figura mostrada está hecha a partir de un pedazo de alambre delgado y homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.



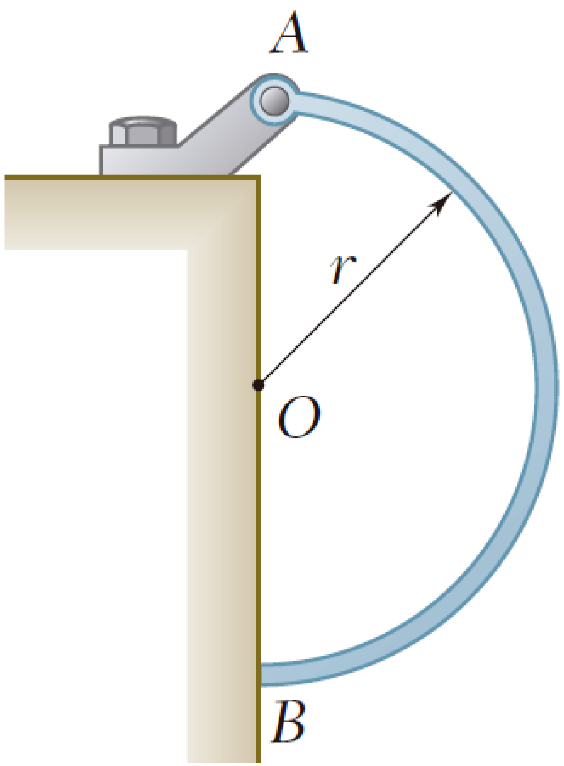
Problema ejemplo 7.2



Segmento	L, in.	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}L$, in^2	$\bar{y}L$, in^2
AB	24	12	0	288	0
BC	26	12	5	312	130
CA	10	0	5	0	50
	$\Sigma L = 60$			$\Sigma \bar{x}L = 600$	$\Sigma \bar{y}L = 180$

$X = 10\ cm$; y=3 cm

Problema ejemplo 7.3

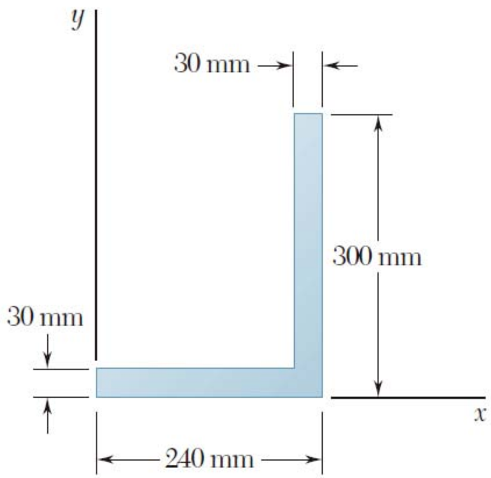


Una barra semicircular uniforme de peso *W* y radio *r* está unida a un perno en *A* y descansa contra una superficie sin fricción en *B*. Determine las reacciones en *A* y *B*.

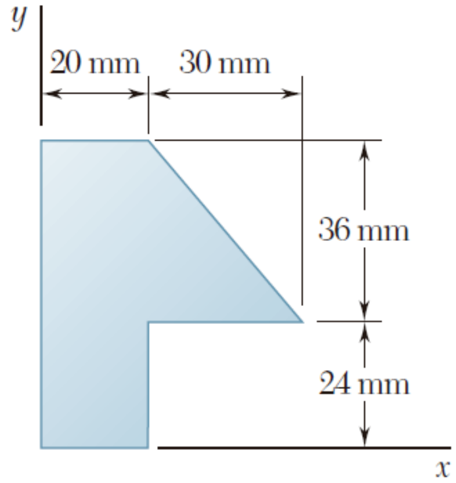
$$A_X = \frac{W}{\pi} \qquad A_Y = W \qquad B = \frac{W}{\pi}$$

Ejercicios propuestos

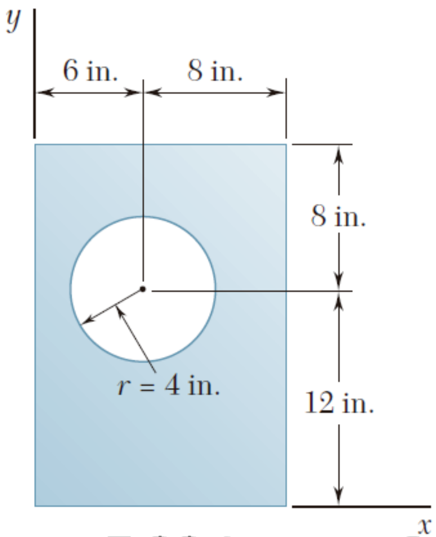
Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.



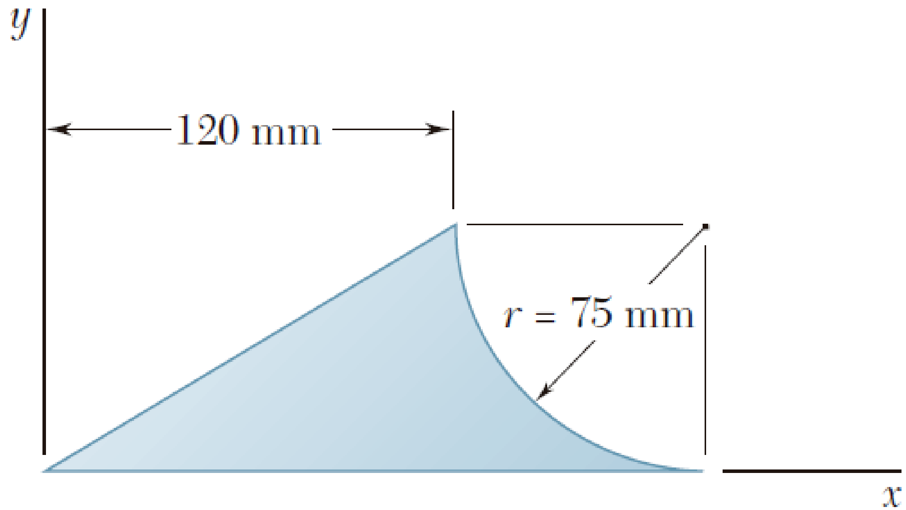
$x = 175{,}6\ mm;\ y = 94{,}4\ mm$



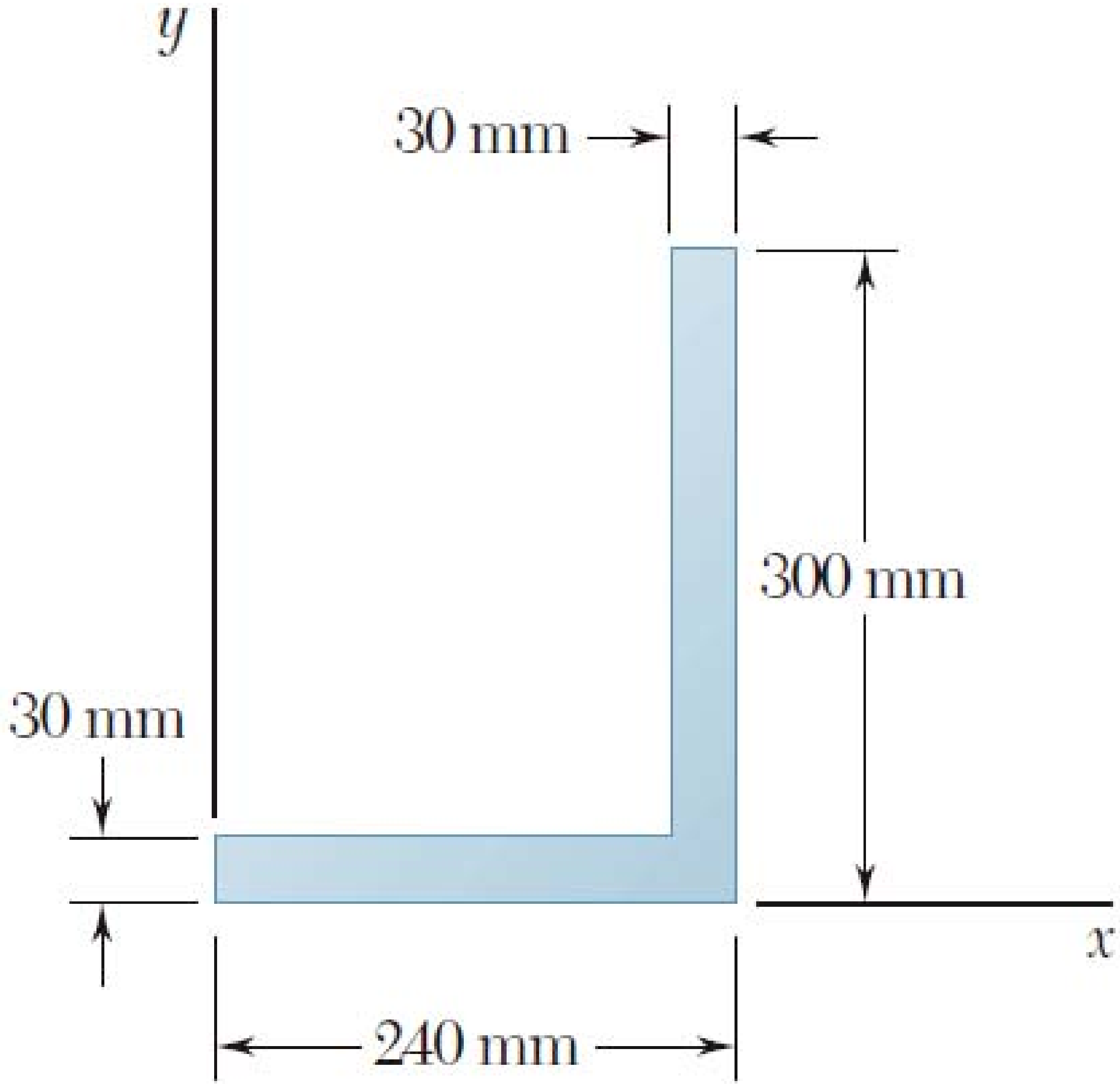
$x = 16{,}21\ mm;\ y = 31{,}9\ mm$



$x = 7{,}22\ in;\ y = 9{,}56\ in$



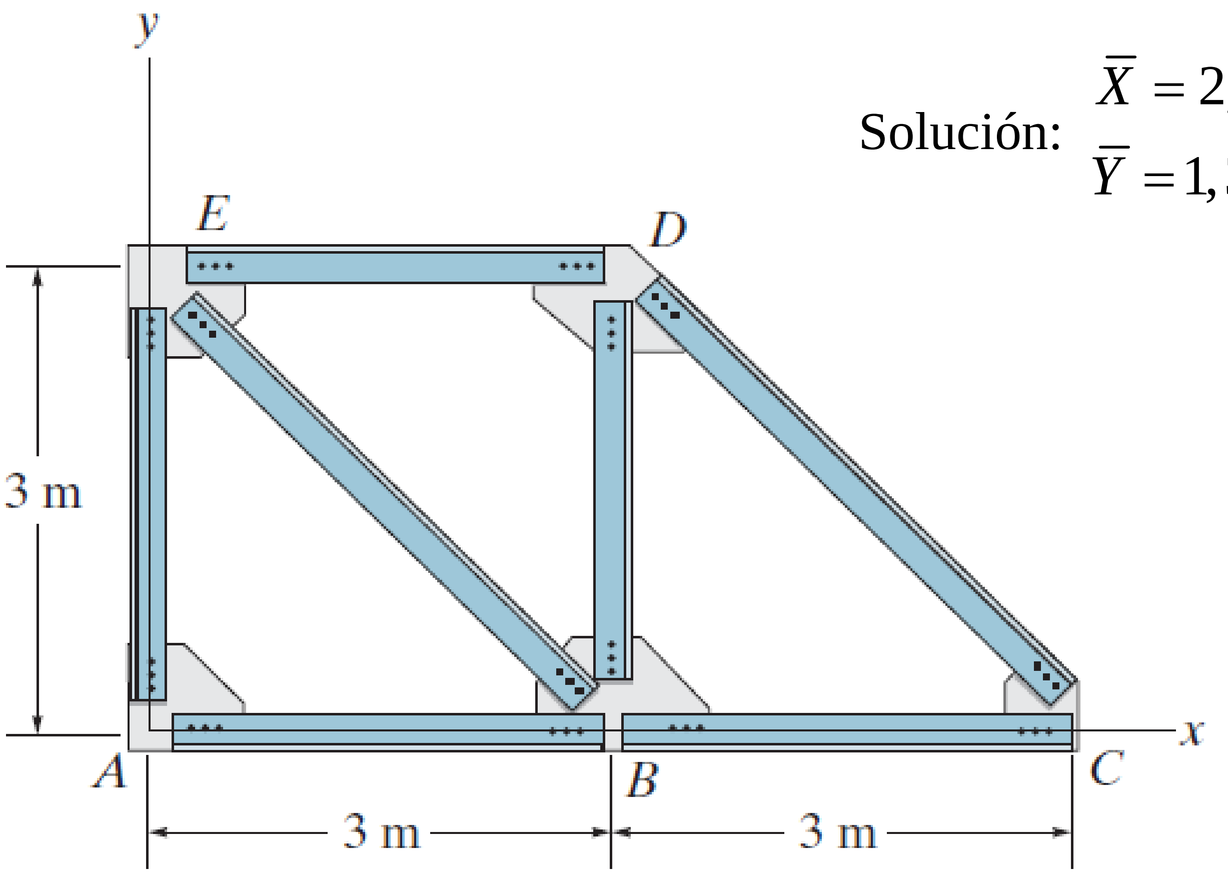
$x = 92\ mm;\ y = 23{,}3\ mm$


y
30 mm
300 mm
30 mm
x
240 mm

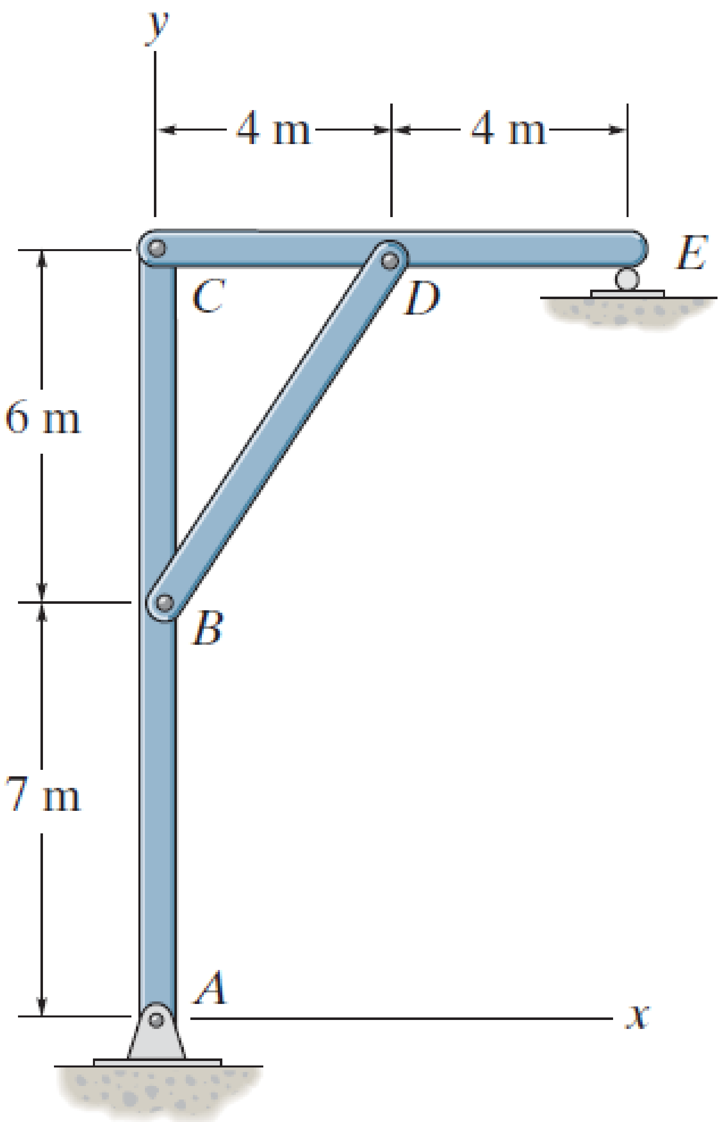
La armadura está hecha de siete elementos, cada uno de los cuales tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m. Localice la posición del centro de masa. Desprecie la masa de las placas de refuerzo en los nodos

Solución: $\bar{X} = 2,43\ m$

$\bar{Y} = 1,31\ m$



Cada uno de los tres elementos del bastidor tiene una masa por unidad de longitud de 6 kg/m. Localice la posición del centro de masa. Desprecie la masa de las placas de refuerzo en los nodos y el espesor de los elementos. Además calcule las reacciones en el pasador A y el rodillo E



Solución:

$$\bar{X} = 1,65\ m$$

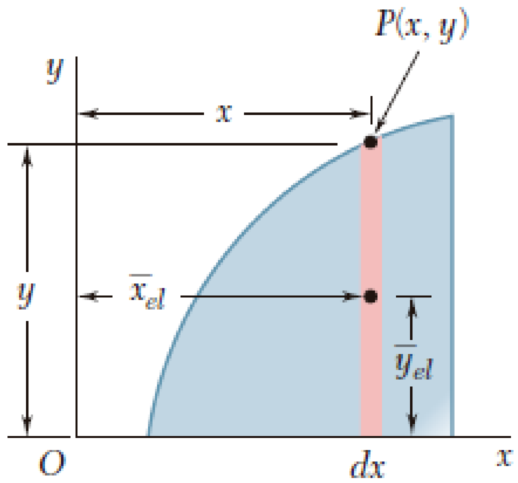
$$\bar{Y} = 9,24\ m$$

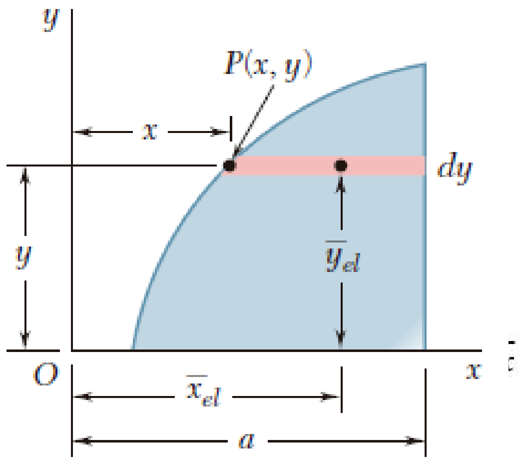
$$A_x = 0;\ A_y = 1,32\ kN;\ E_y = 342\ N$$

Determinación de Centroides por Integración

$$\bar{x}A = \int x dA = \iint x\, dx dy = \int \bar{x}_{el}\, dA$$
$$\bar{y}A = \int y dA = \iint y\, dx dy = \int \bar{y}_{el}\, dA$$

Si el elemento de área *dA* es un pequeño rectángulo de lados *dx* y *dy*, la evaluación de cada una de estas integrales requiere una *integración doble* con respecto a *x* y respecto a *y*.



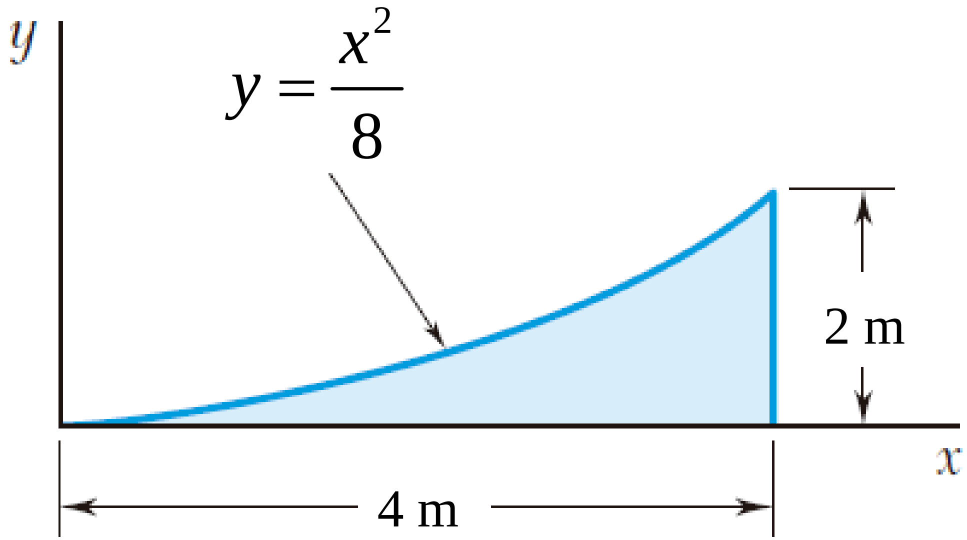


$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int x\,(ydx)$$
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int \frac{y}{2}(ydx)$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}\, dA = \int \frac{a+x}{2}\left[(a-x)dx\right]$$
$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el}\, dA = \int y\left[(a-x)dx\right]$$

Problema ejemplo 7.4

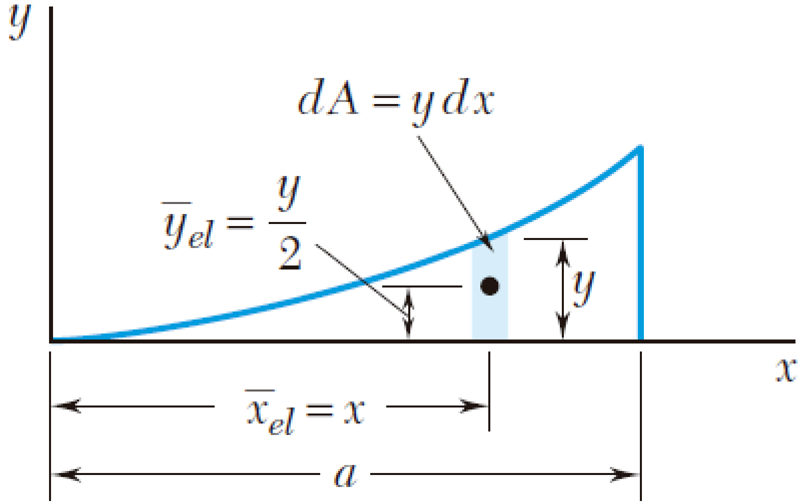
Determine por integración directa la localización del centroide de una enjuta parabólica.



X=3 m

Y=0,6 m

Problema ejemplo 7.4



- Utilizando un elemento diferencial vertical

$$Q_y = \int \bar{x}_{el} dA = \int xy dx = \int_0^4 x\left(\frac{1}{8}x^2\right)dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}\frac{x^4}{4}\right]_0^4 = \frac{4^4}{32} = 8\ m^3$$

$$Q_x = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2} y dx = \int_0^4 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}x^2\right)^2 dx$$

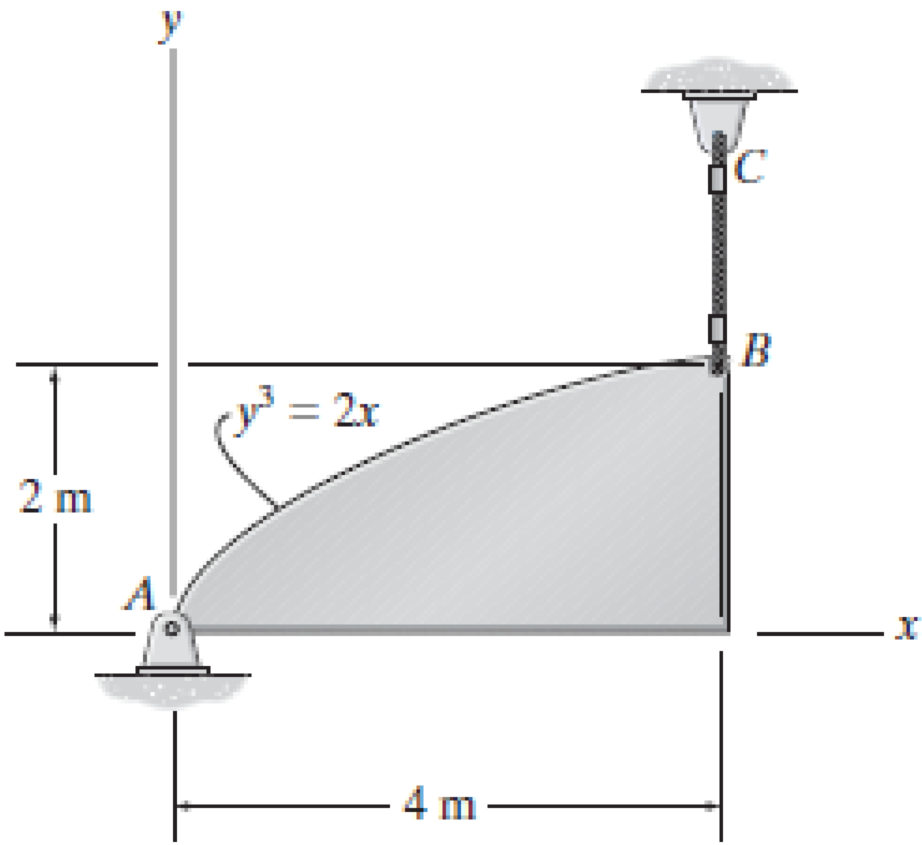
$$= \left[\frac{1}{128}\frac{x^5}{5}\right]_0^4 = \frac{4^5}{640} = 1{,}6\ m^3$$

$$A = \int_0^4 y dx = \int_0^4 \frac{1}{8}x^2 dx = \left[\frac{1}{24}x^3\right]_0^4 = \frac{8}{3}m^2$$

$$X = \frac{Q_y}{A} = \frac{8}{8/3} = 3\ m \quad ; \quad Y = \frac{Q_x}{A} = \frac{1{,}6}{8/3} = 0{,}6\ m$$

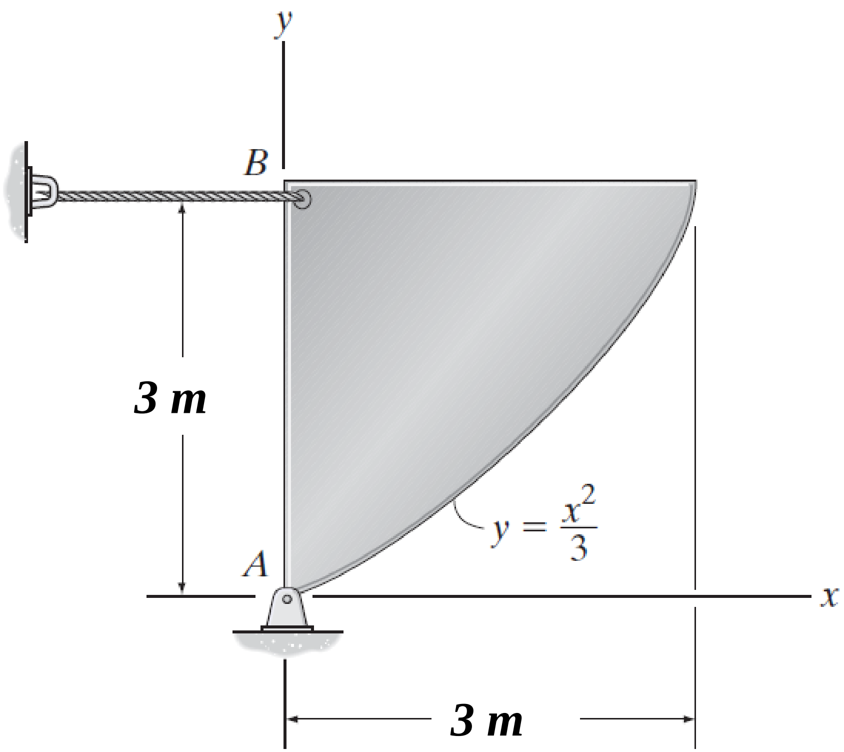
Ejercicio propuesto

La placa está hecha de acero que tiene una densidad de 7850 kg/m^3. Si el espesor de la placa es de 10 mm, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *A* y la tensión en el cable *BC*.



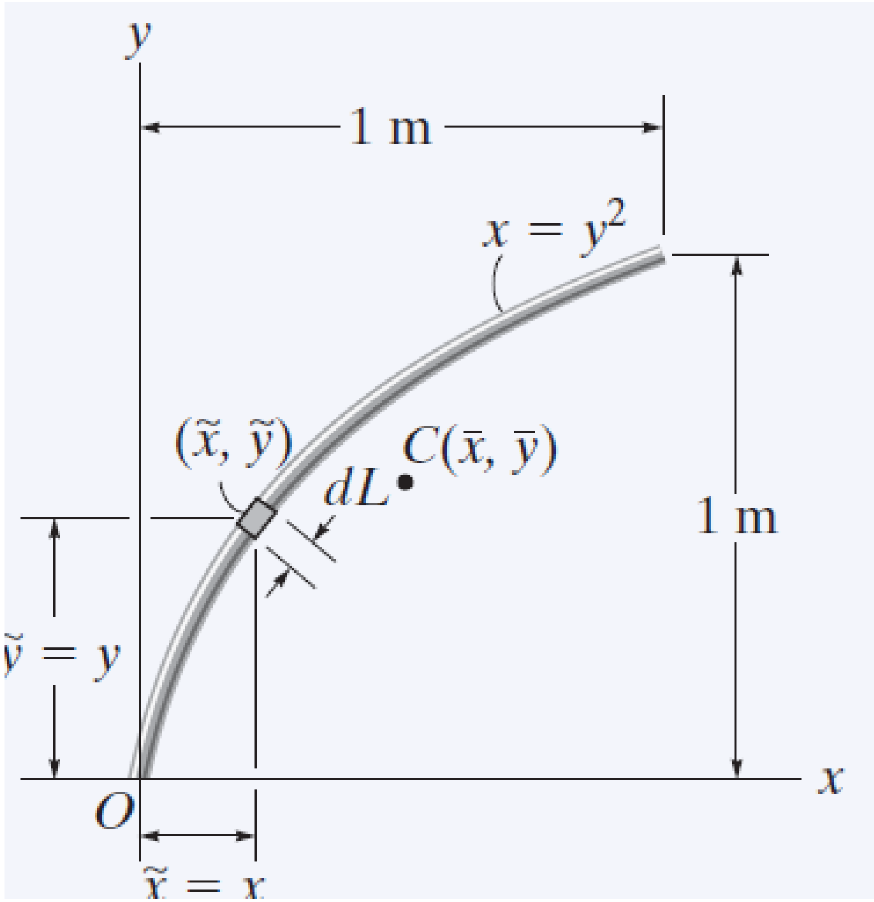
Ejercicio propuesto

La placa está hecha de acero que tiene una densidad de 8000 kg/m^3. Si el espesor de la placa es de 5 mm, determine las componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador *A* y la tensión en el cable *B*.



Problema ejemplo 7.5

Localice el centroide de la varilla doblada en forma de arco parabólico, como se muestra en la figura.



Solución arco parabólico

WolframAlpha computational knowledge engine

(integrate (y^2*sqr(4*y^2+1)dy from y=0 to 1)/(integrate (sqr(4*y^2+1)dy from y=0 to

$$X = 0,410\ m$$

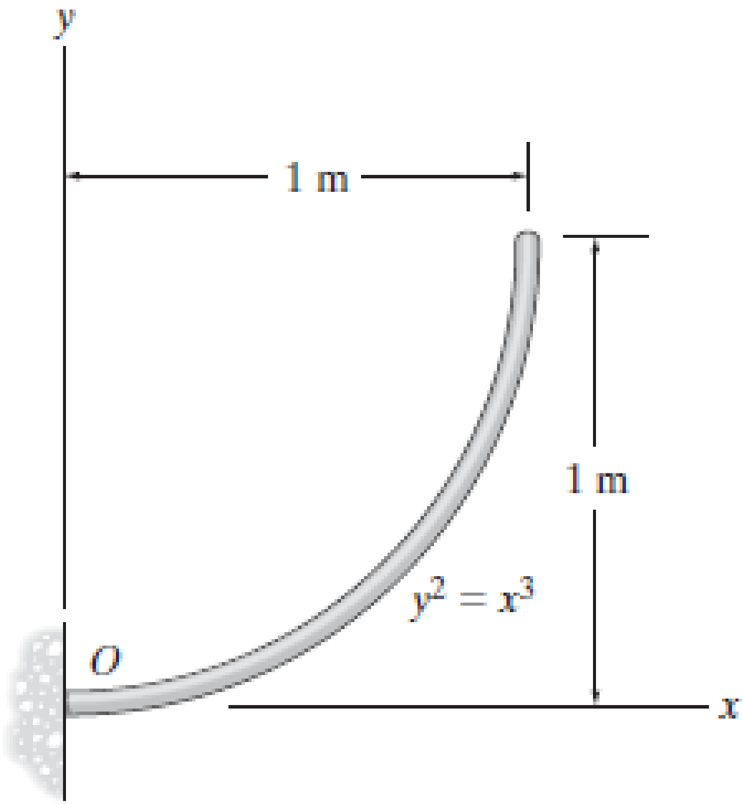
WolframAlpha computational knowledge engine

(integrate (y*sqr(4*y^2+1)dy from y=0 to 1)/(integrate (sqr(4*y^2+1)dy from y=0 to 1)

$$y = 0,574\ m$$

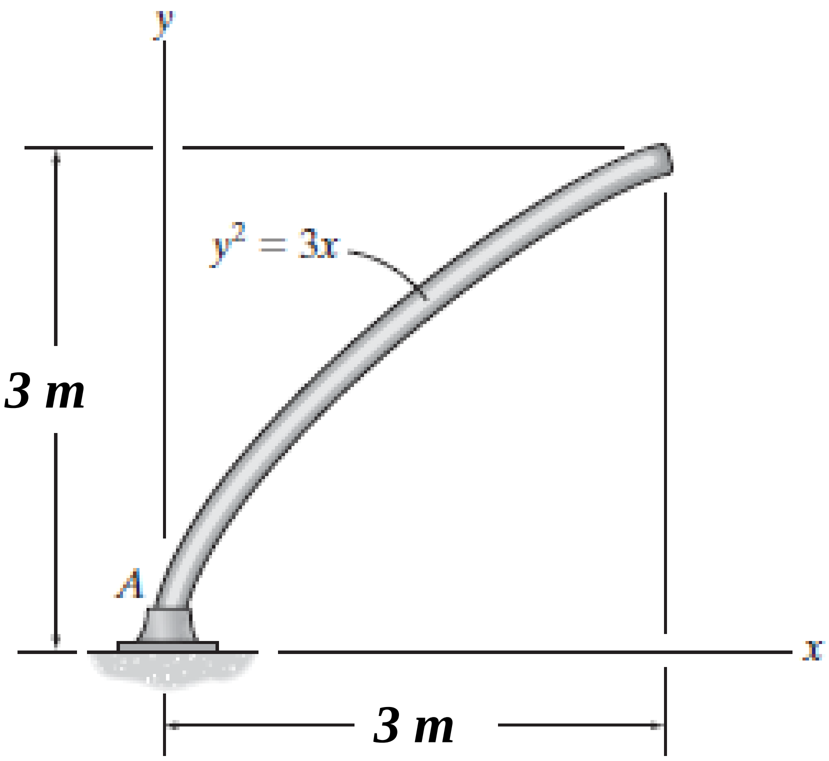
Ejercicio propuesto

Determine la distancia X hasta el centro de masa de la barra homogénea doblada en la forma que se muestra. Si la barra tiene una masa por unidad de longitud de 0,5 kg/m, determine las reacciones en el soporte fijo *O*.



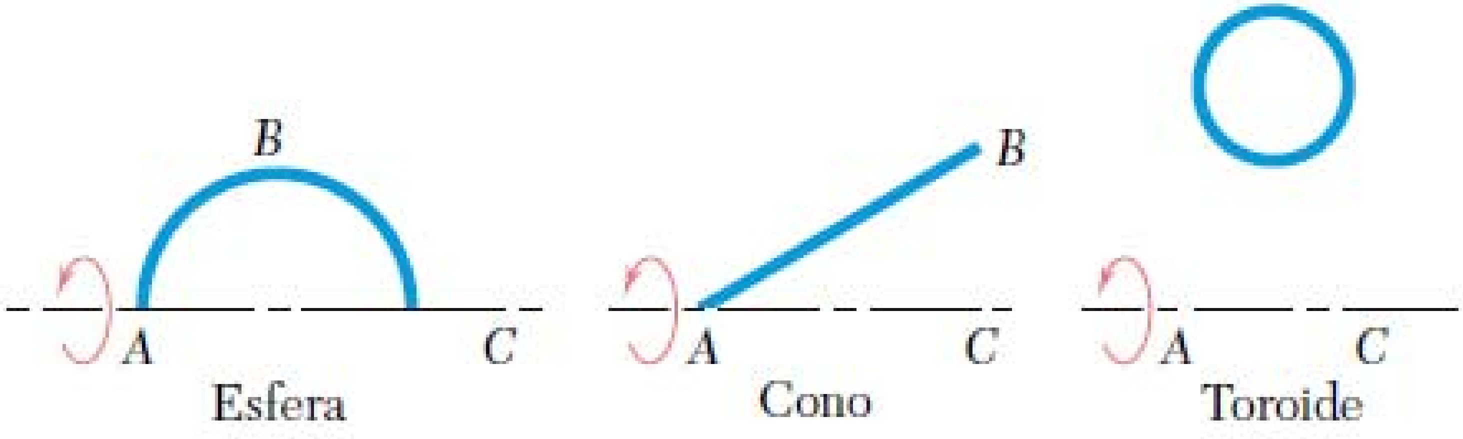
Ejercicio propuesto

La barra uniforme está doblada en forma de una parábola y tiene una masa por unidad de longitud de 2,5 kg/m. Determine las reacciones en el soporte fijo *A*.



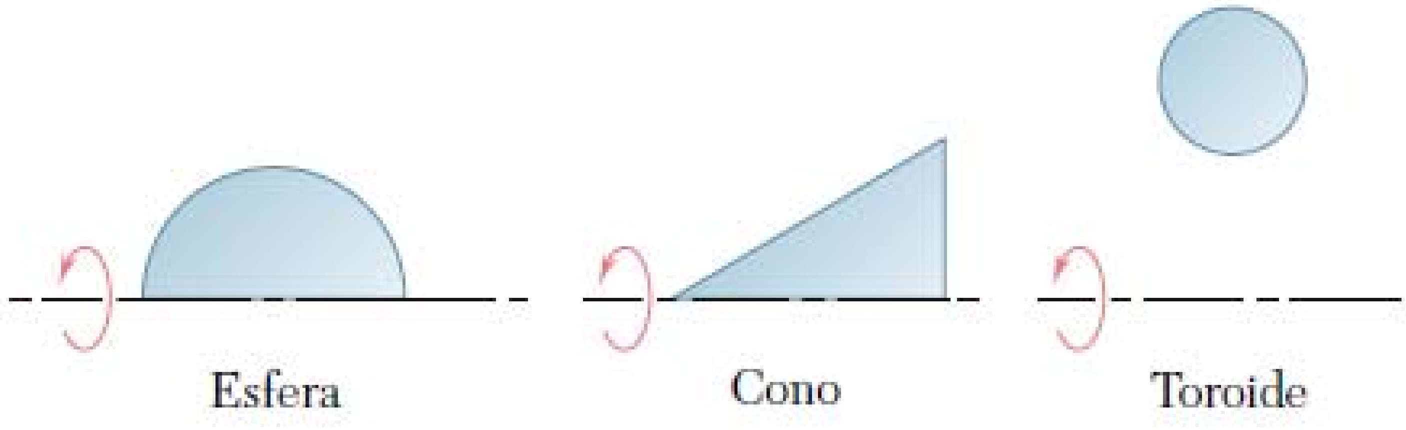
Teoremas de Pappus-Guldin

Una ***superficie de revolución*** se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo.



TEOREMA I. *El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide de dicha curva al momento de generar la superficie.*

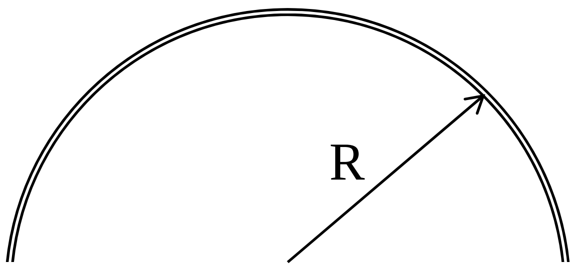
Teoremas de Pappus-Guldin



TEOREMA II. *El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centroide del área al momento de generar el cuerpo.*

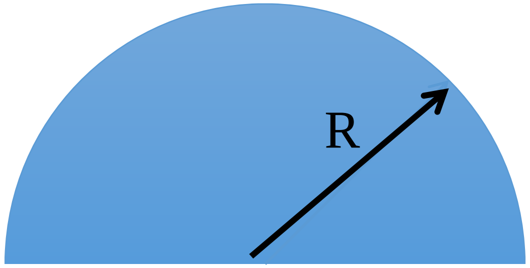
Ejercicio propuesto

Mediante los teoremas de Pappus-Guldin, encontrar el centroide de un arco semicircular de radio R



Ejercicio propuesto

Mediante los teoremas de Pappus-Guldin, encontrar el centroide de una placa semicircular de radio R



Definición de momentos de inercia para áreas

Siempre que una carga distribuida actúa **en forma perpendicular** a un área y que su **intensidad varía linealmente**, el cálculo del momento de la distribución de carga con respecto a un eje implicará una cantidad llamada el ***momento de inercia del área.***

Ejemplo:

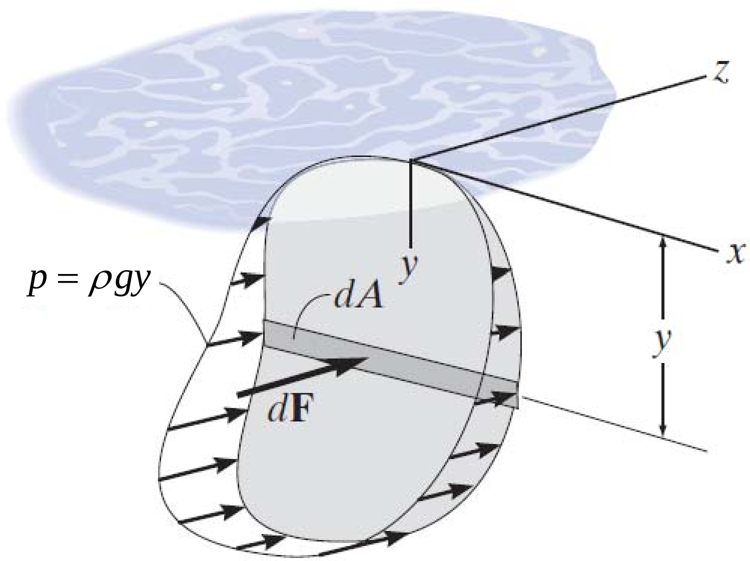
$$dF = pdA = \rho g y dA$$

El momento de esta fuerza respecto del eje x es:

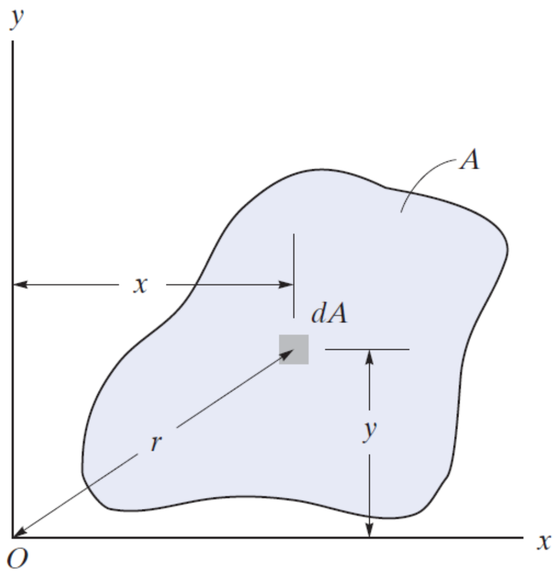
$$dM = ydF = \rho g y^2 dA$$

y al integrar dM sobre toda el área de la placa resulta

$$M = \int \rho g y^2 dA = \rho g \int y^2 dA$$



Momento de inercia. Por definición, los momentos de inercia de un área diferencial *dA* con respecto a los ejes *x* y *y* son $dI_x = y^2 dA$; $dI_y = x^2 dA$ respectivamente . Los *momentos de inercia* se determinan por integración para toda el área; es decir



$$I_x = \int y^2 dA \quad ; \quad I_y = \int x^2 dA$$

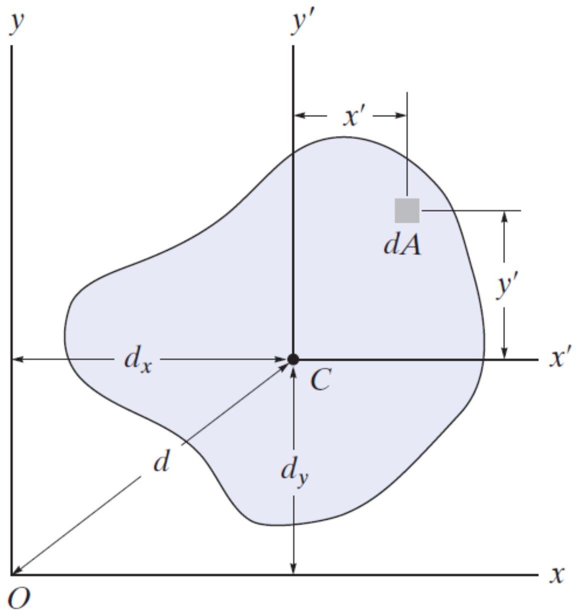
$$I_O = \int r^2 dA = I_x + I_y$$

Los momentos de inercia siempre son positivos, y sus unidades son las de una distancia elevado a la cuarta potencia.

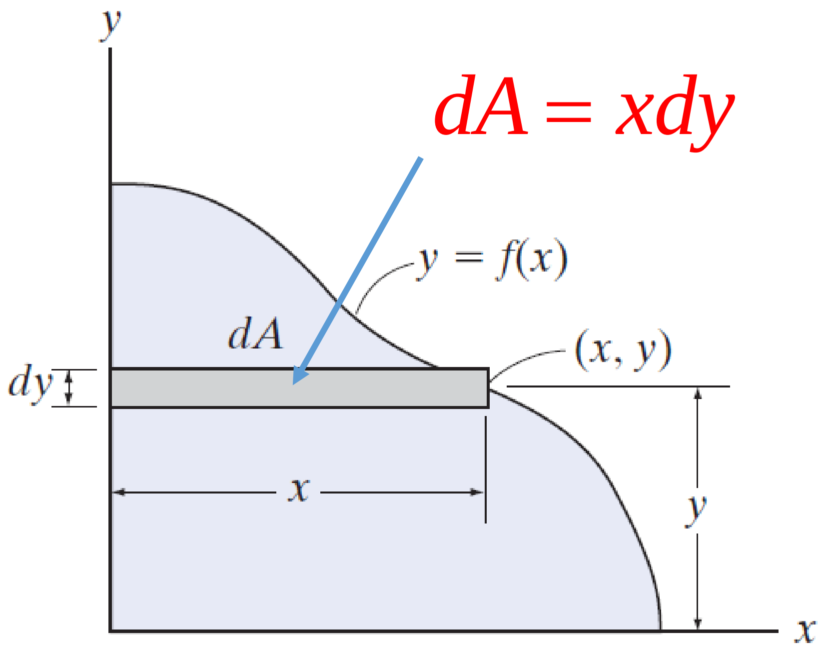
Teorema de los ejes paralelos para un área

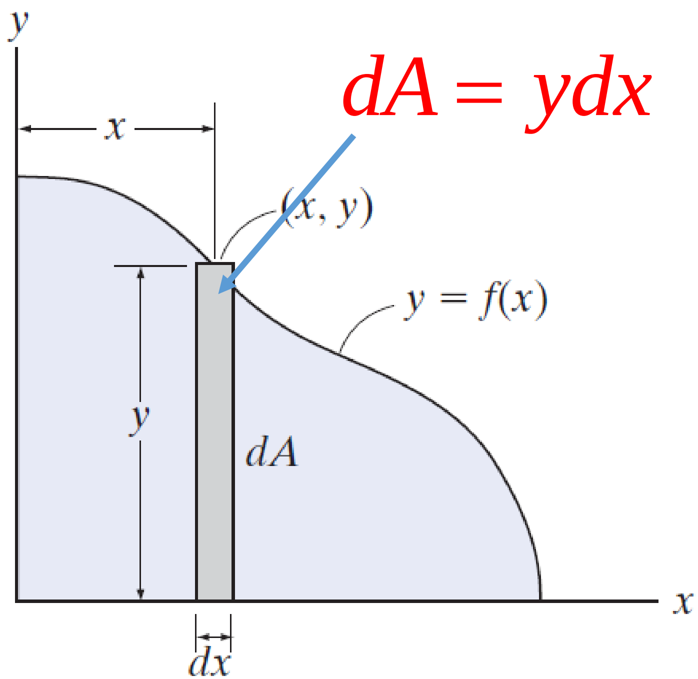
El *teorema de los ejes paralelos* puede usarse para determinar el momento de inercia de un área con respecto a *cualquier eje* que sea paralelo a un eje que pasa a través de su centroide y del cual se conozca el momento de inercia.

$$I_x = I_{x'} + d_y^{\,2} A \quad ; \quad I_y = I_{y'} + d_x^{\,2} A$$



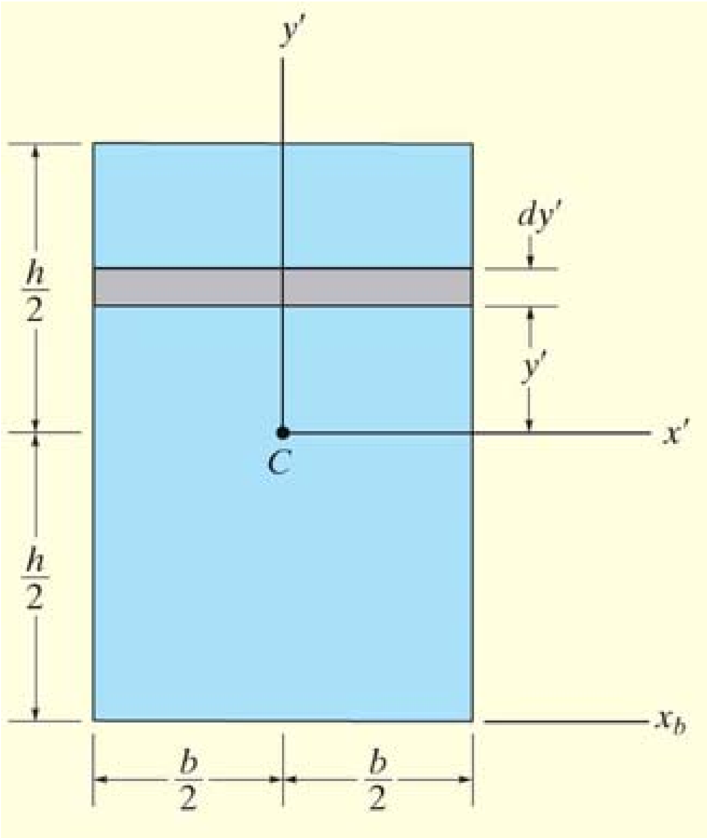
El momento de inercia de un área con respecto a un eje es igual al momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo que pase a través del centroide del área, más el producto del área y el cuadrado de la distancia perpendicular entre los ejes.





$$I_x = \int y^2 dA = \int y^2 x dy \quad ; \quad I_y = \int x^2 dA = \int x^2 y dx$$

Problema ejemplo 7.6 (a)



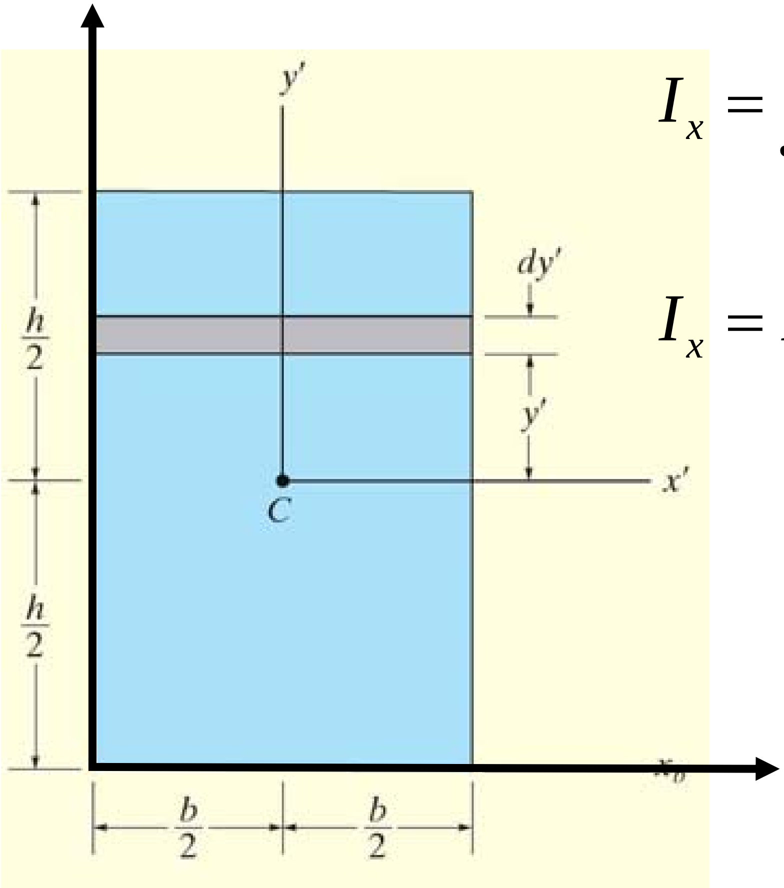
$$I_{x'} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y'^2 b dy' = \frac{1}{12} bh^3$$

Cambiando la *b* por la *h*

$$I_{y'} = \frac{1}{12} hb^3$$

Momentos de inercia con respecto a los ejes que pasan por su centro

Problema ejemplo 7.6 (b)



$$I_x = \int_0^h y'^2 dA = \int_0^h y'^2 b dy' = \frac{1}{3} bh^3$$

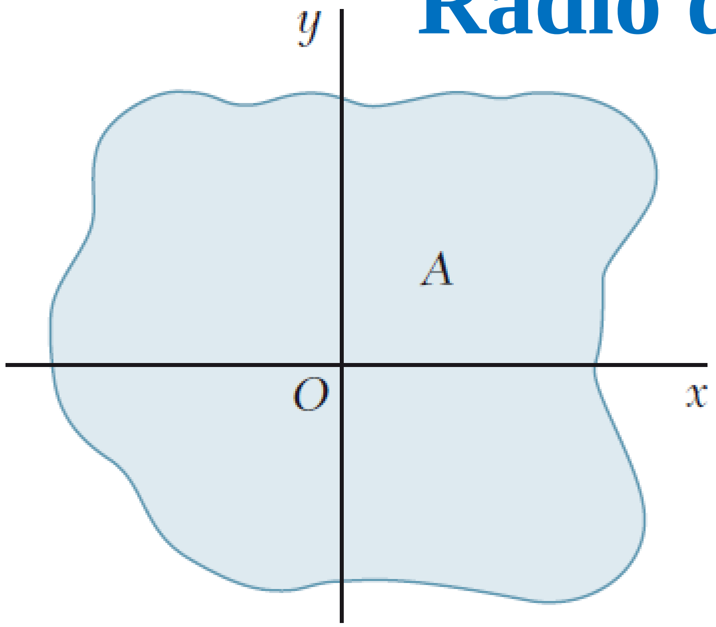
$$I_x = I_{x'} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 A = \frac{1}{12} bh^3 + \frac{h^2}{4} bh = \frac{1}{3} bh^3$$

Cambiando la *b* por la *h*

$$I_y = \frac{1}{3} hb^3$$

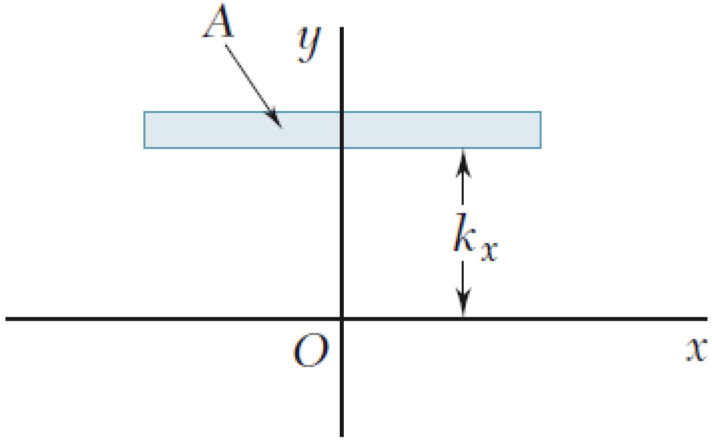
Momentos de inercia con respecto a los ejes que pasan por su base

Radio de giro de un área



a)

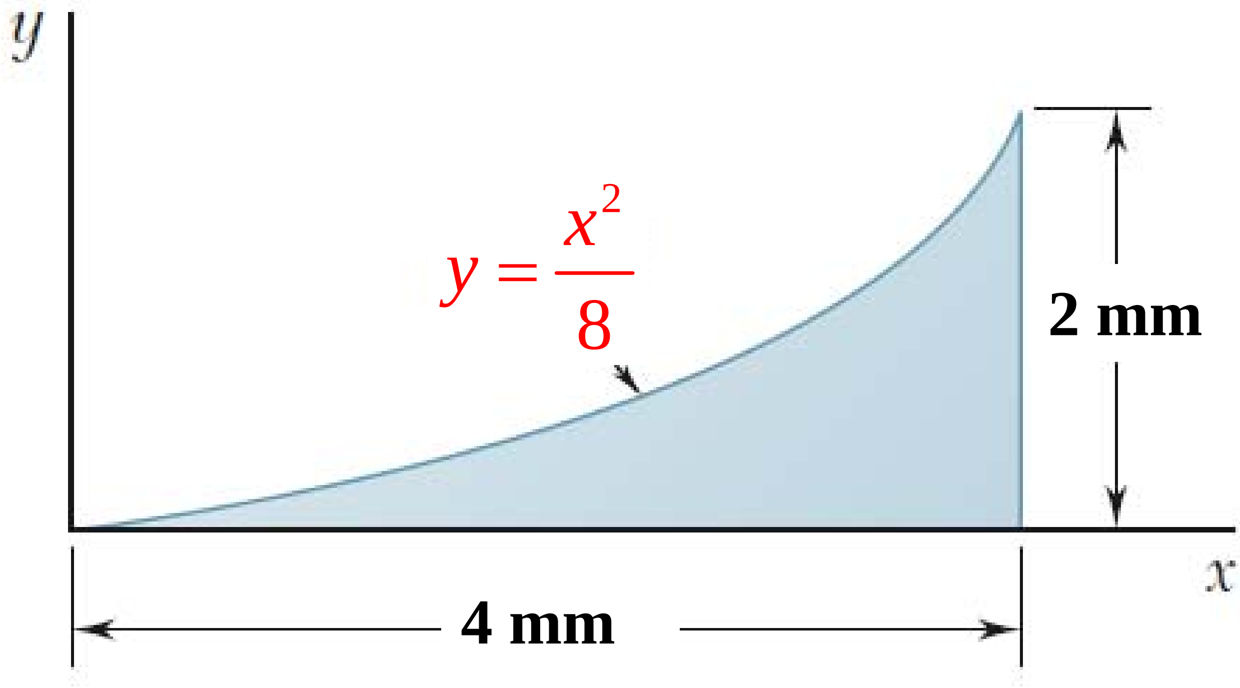
$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$



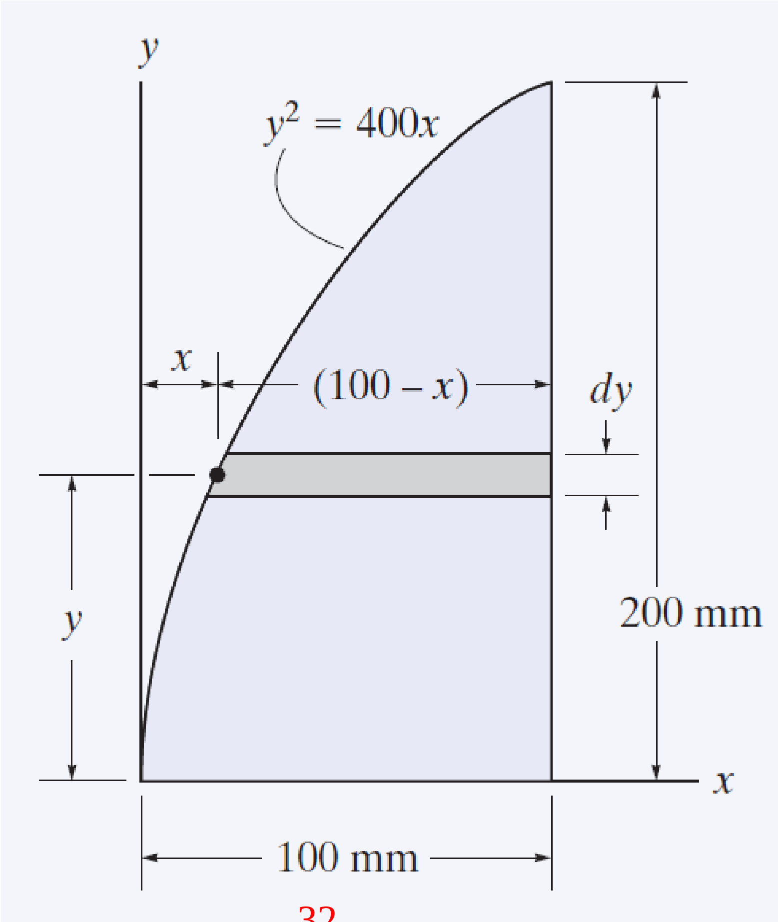
b)

$$k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

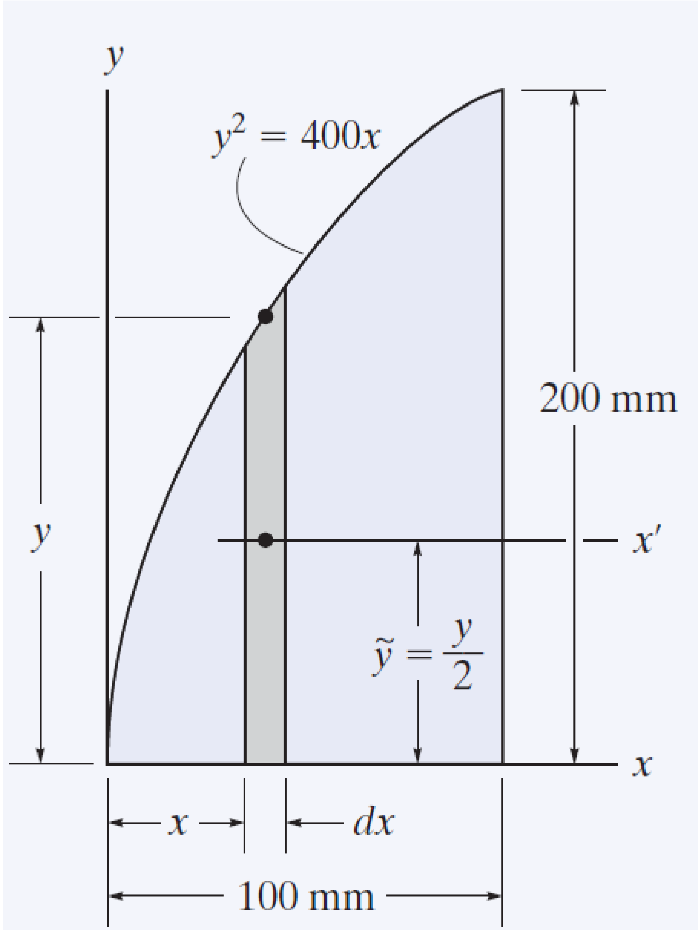
Determine el momento de inercia respecto a cada uno de los ejes coordenados, y calcule el radio de giro del área respecto a cada uno de los mismos.



Problema ejemplo 7.7

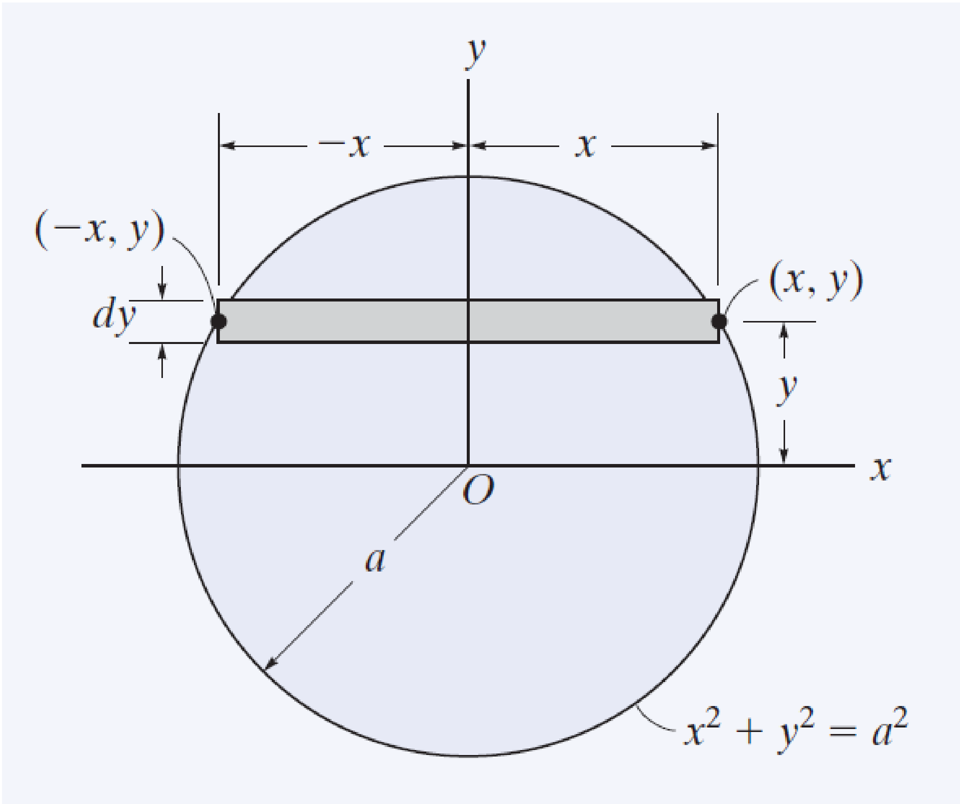


$$I_x = \frac{32}{3} \times 10^7\, mm^4$$



$$I_y = \frac{40}{7} \times 10^7\, mm^4$$

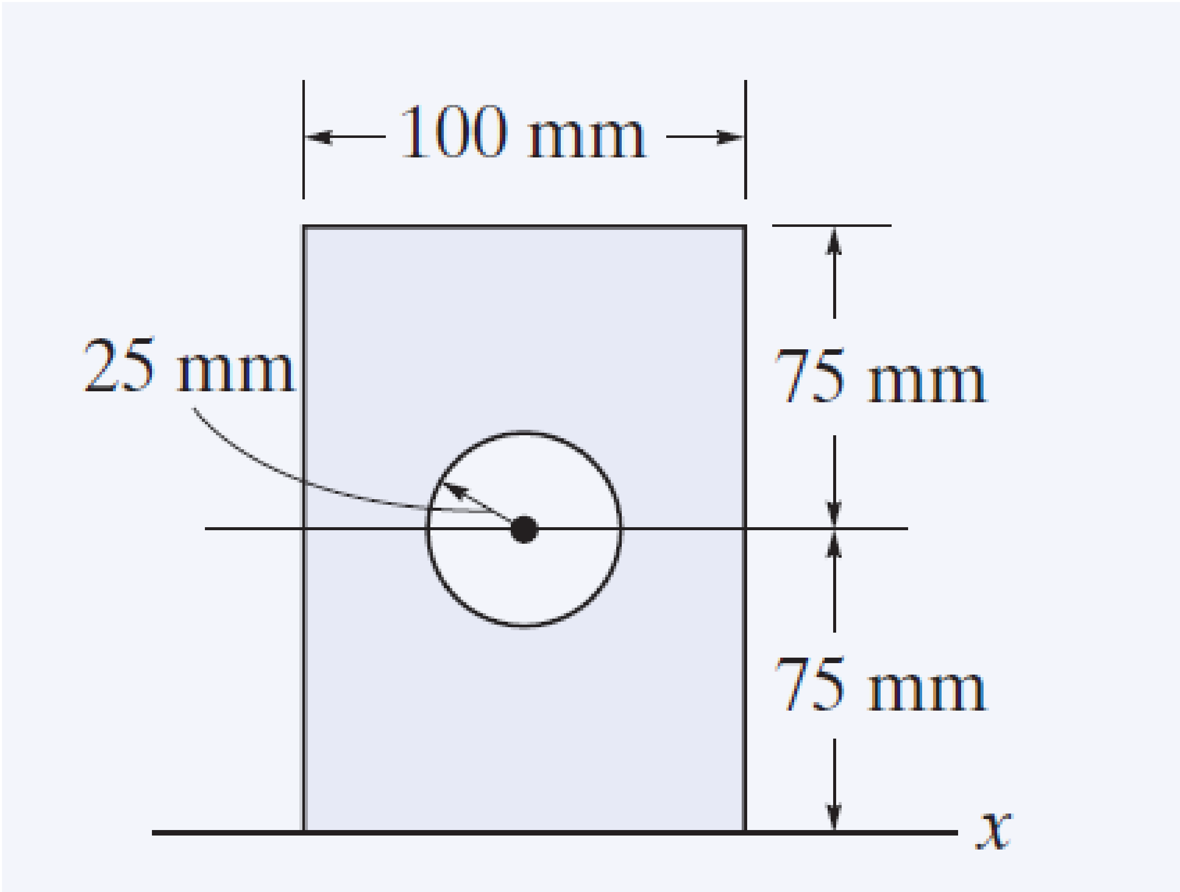
Problema ejemplo 7.8



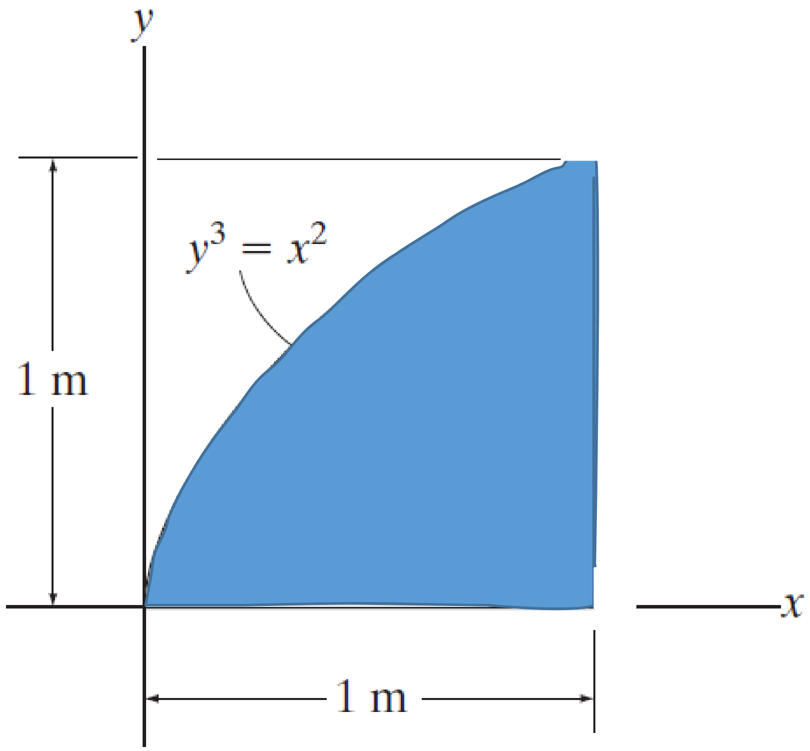
$$I_x = \frac{\pi a^4}{4}$$

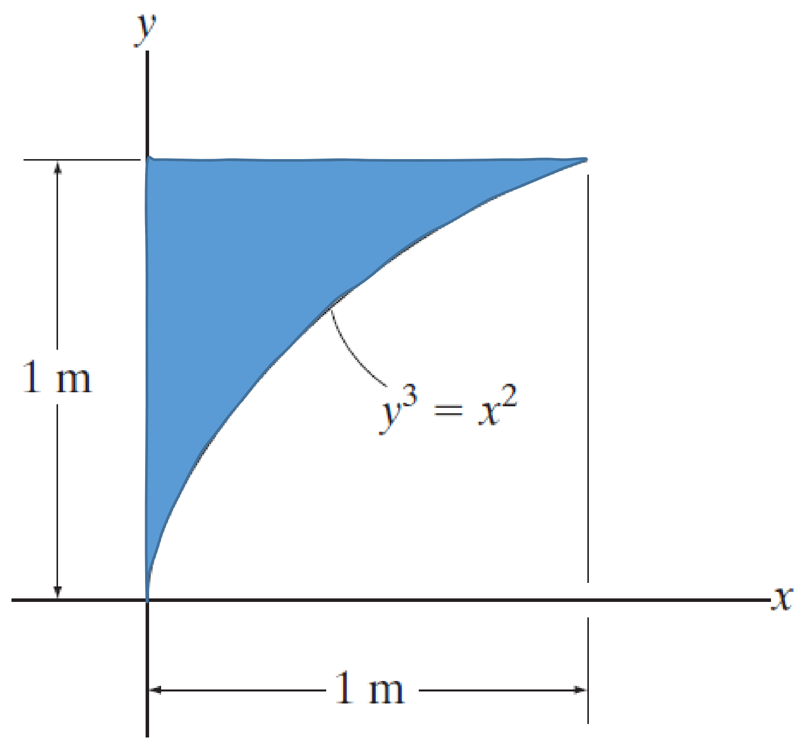
Determine el momento de inercia del área de la figura

$$101 \cdot 10^{6}\, mm^{4}$$



Problemas ejemplos 7.9 , 7-10

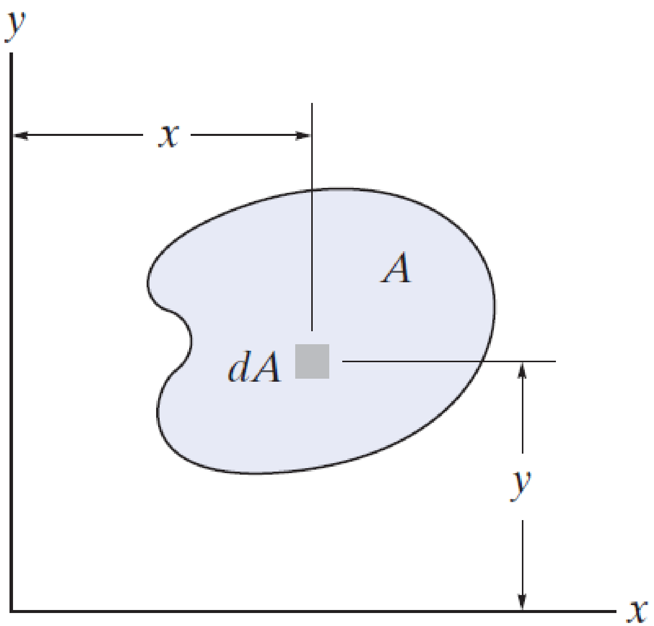




$I_x = 0{,}111\ m^4$; $I_y = 0{,}273\ m^4$

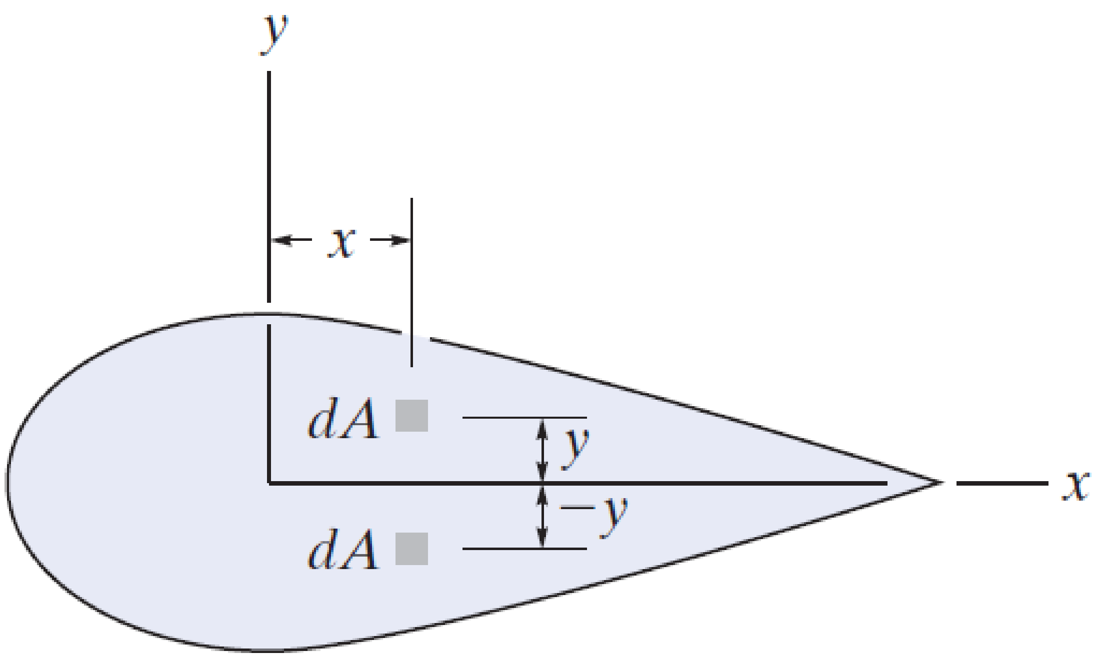
$I_x = 0{,}222\ m^4$; $I_y = 0{,}0606\ m^4$

Definición de producto de inercia para un área



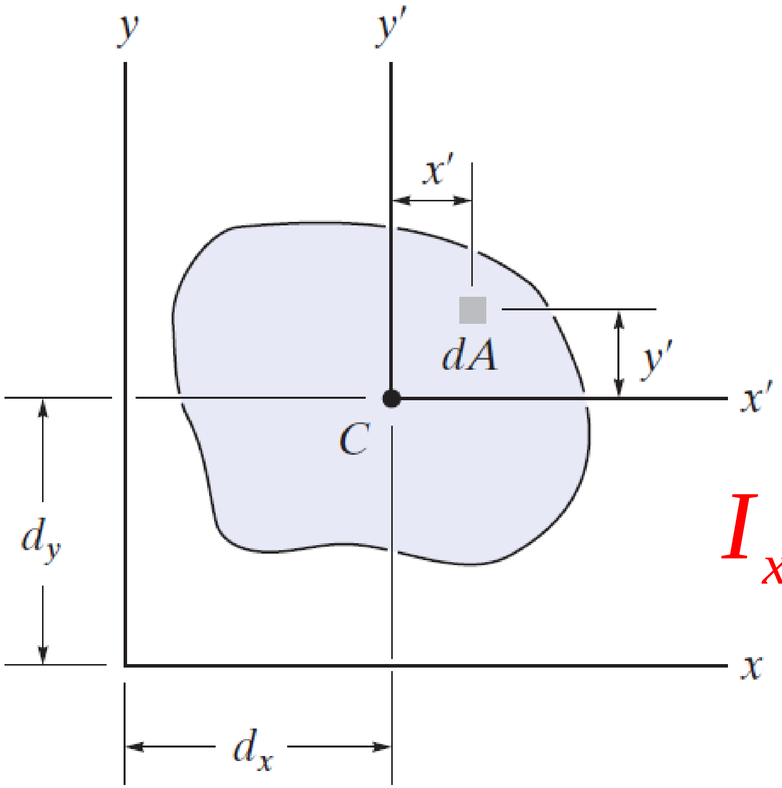
$$I_{xy} = \int xy dA$$

Igual que el momento de inercia, el producto de inercia tiene unidades de longitud a la cuarta potencia. Sin embargo, como *x* o *y* pueden ser cantidades negativas, el producto de inercia **puede ser positivo, negativo o cero**, dependiendo de la ubicación y orientación de los ejes coordenados.



El producto de inercia I_{xy} para área será cero **si el eje *x*, o el eje *y*, es un eje de simetría** para el área, como en la figura. Aquí, cada elemento *dA* localizado en el punto *(x, y)* tiene un elemento *dA* correspondiente en *(x, -y)*. Como los productos de inercia para esos elementos son, respectivamente, *xy dA* y *-xy dA*, la suma algebraica o integración de todos los elementos que se elijan de esta manera se cancelarán uno a uno. En consecuencia, **el producto de inercia para el área total se convierte en cero**.

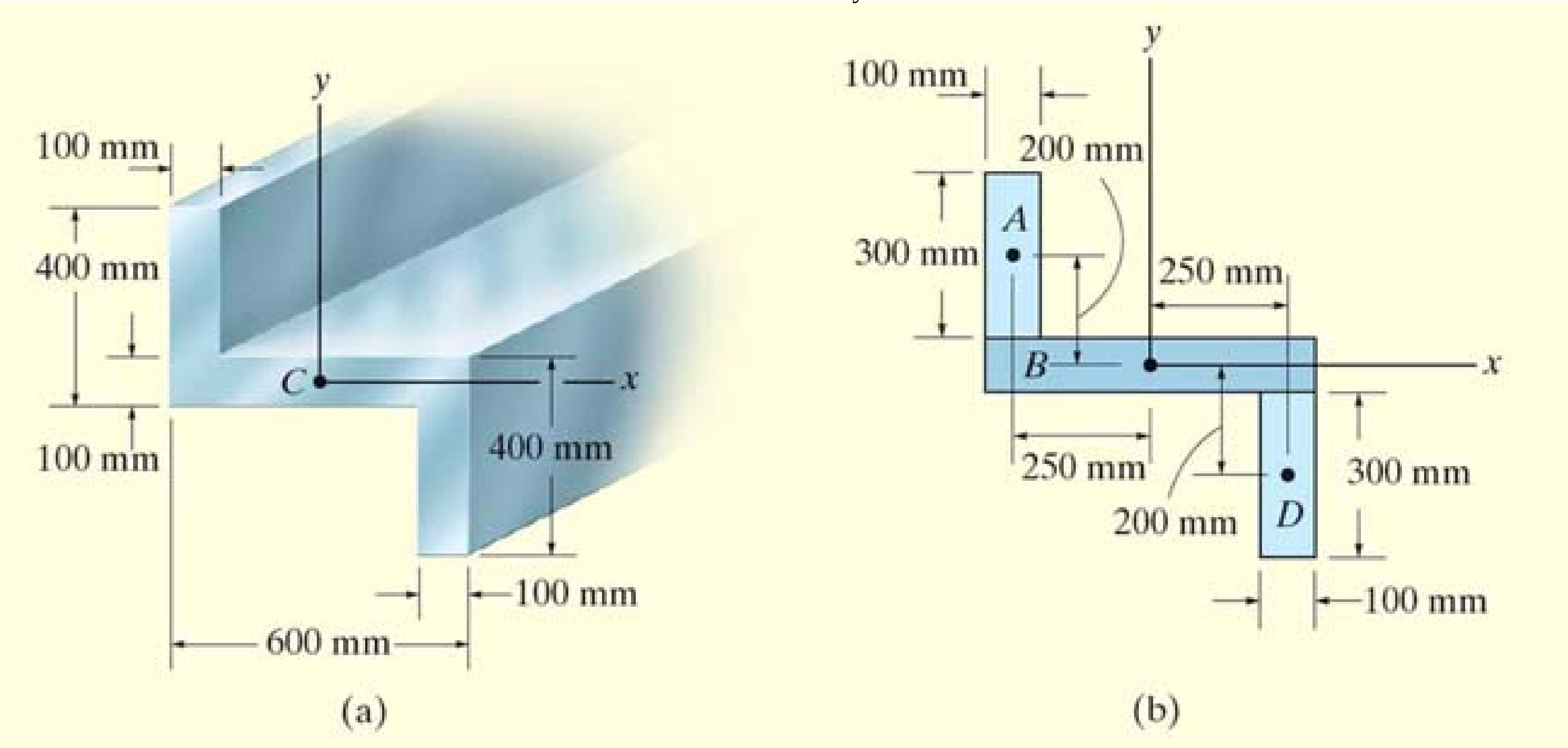
Teorema de los ejes paralelos para el producto de inercia

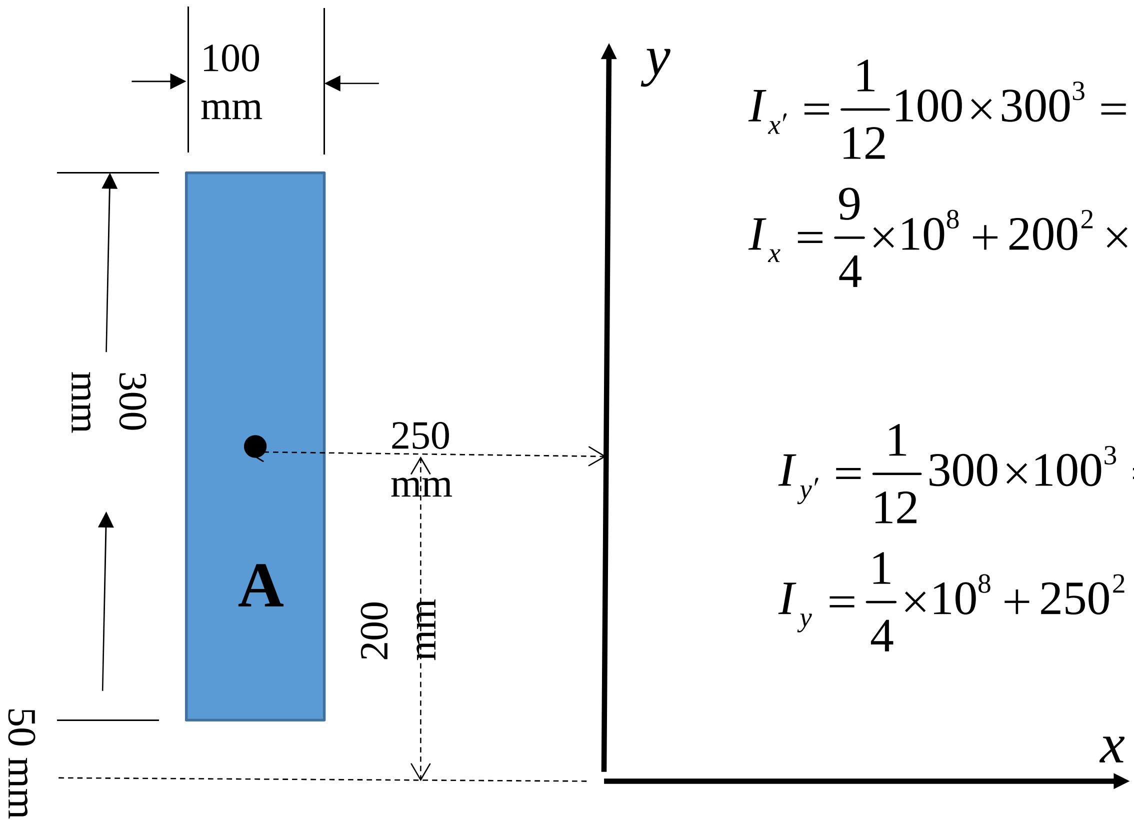


$$I_{xy} = \int xy\,dA = I_{x'y'} + d_x d_y A$$

Problema ejemplo completo 7.11

Determine: a) Los momentos de inercia I_{xx} , I_{yy} con respecto a los ejes X e Y de la figura. b) El producto de inercia I_{xy}



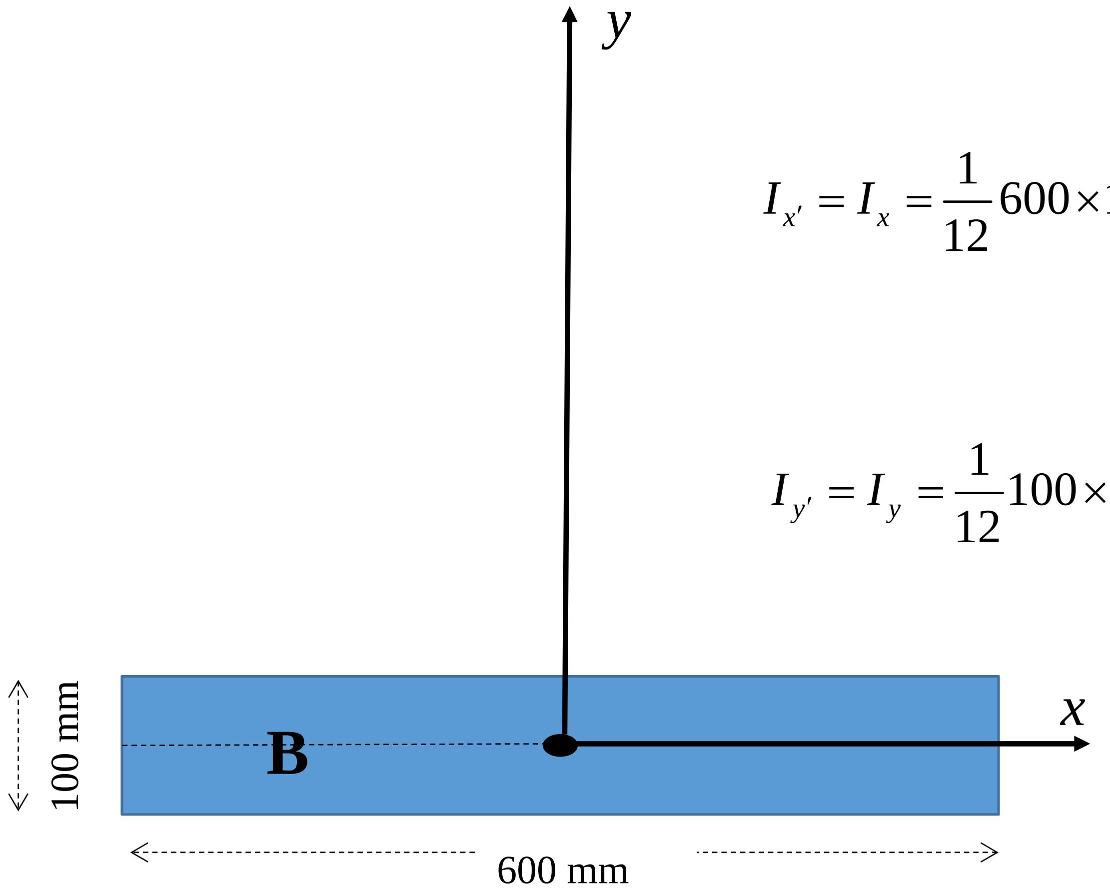


$$I_{x'} = \frac{1}{12}100 \times 300^3 = \frac{9}{4} \times 10^8\, mm^4$$

$$I_x = \frac{9}{4} \times 10^8 + 200^2 \times 100 \times 300 = 14,25 \times 10^8\, mm^4$$

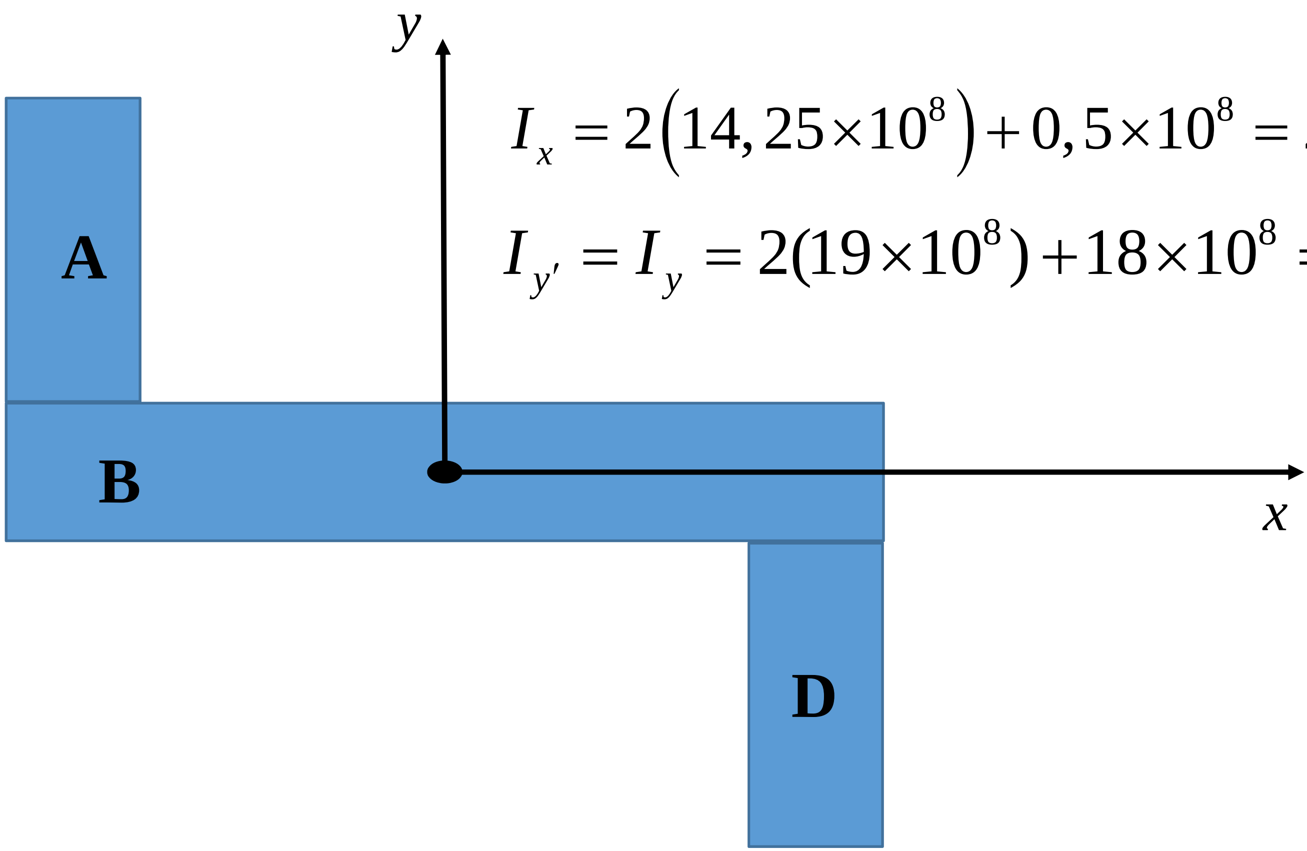
$$I_{y'} = \frac{1}{12}300 \times 100^3 = \frac{1}{4} \times 10^8\, mm^4$$

$$I_y = \frac{1}{4} \times 10^8 + 250^2 \times 100 \times 300 = 19 \times 10^8\, mm^4$$



$$I_{x'} = I_x = \frac{1}{12} 600 \times 100^3 = 0,5 \times 10^8 \, mm^4$$

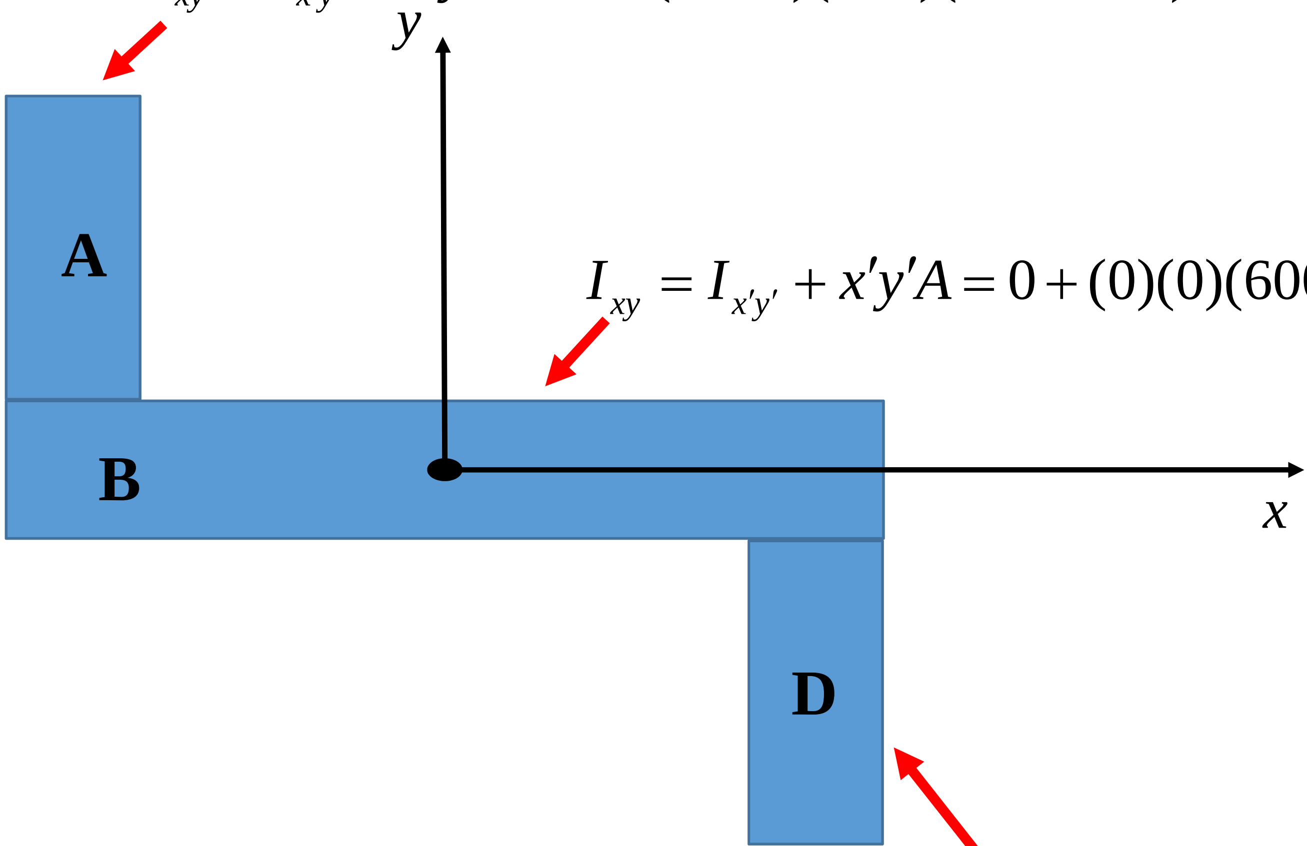
$$I_{y'} = I_y = \frac{1}{12} 100 \times 600^3 = 18 \times 10^8 \, mm^4$$



$$I_x = 2\left(14,25\times10^8\right)+0,5\times10^8 = 29\times10^8\,mm^4$$

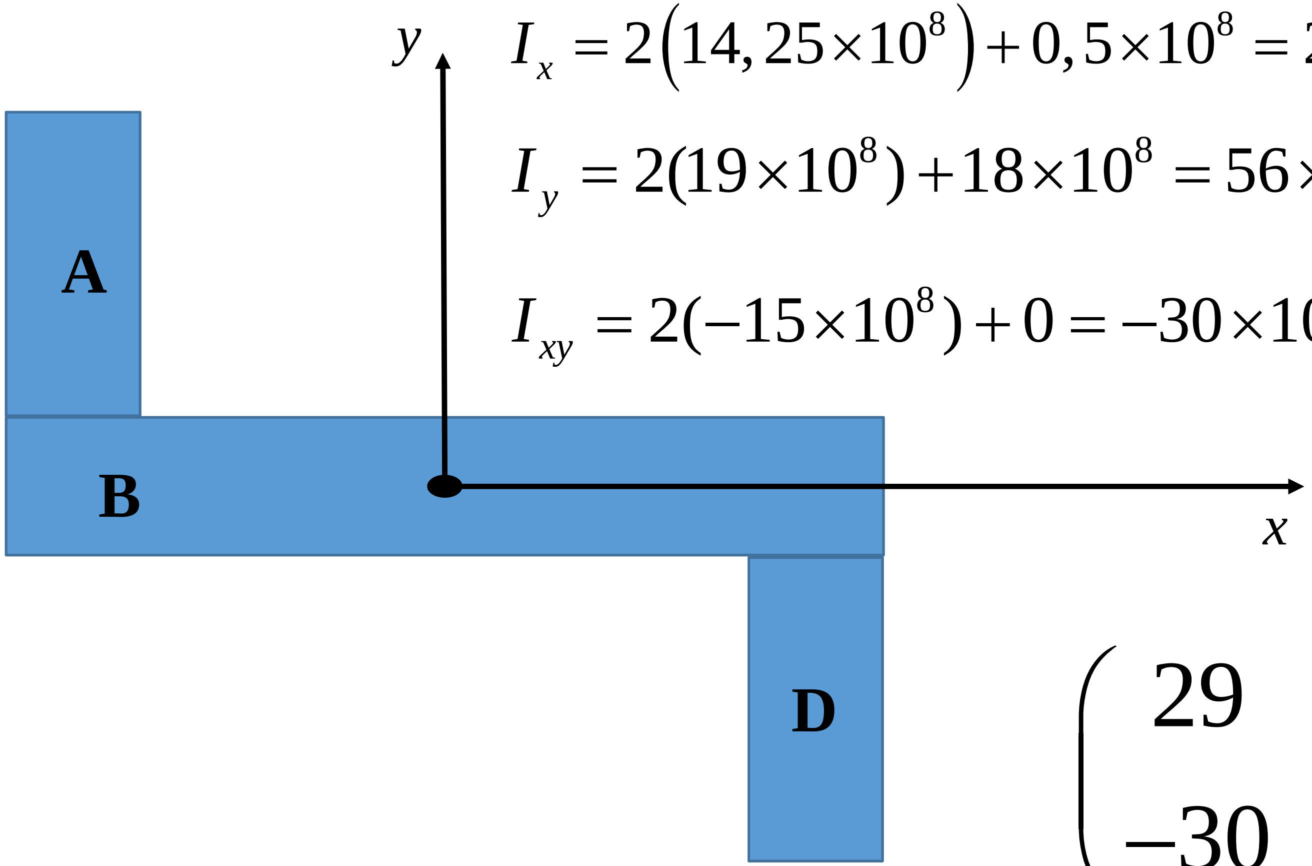
$$I_{y'} = I_y = 2(19\times10^8)+18\times10^8 = 56\times10^8\,mm^4$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + x'y'A = 0 + (-250)(200)(300 \times 100) = -15 \times 10^{8}\, mm^{4}$$



$$I_{xy} = I_{x'y'} + x'y'A = 0 + (0)(0)(600 \times 100) = 0$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + x'y'A = 0 + (250)(-200)(300 \times 100) = -15 \times 10^{8}\, mm^{4}$$



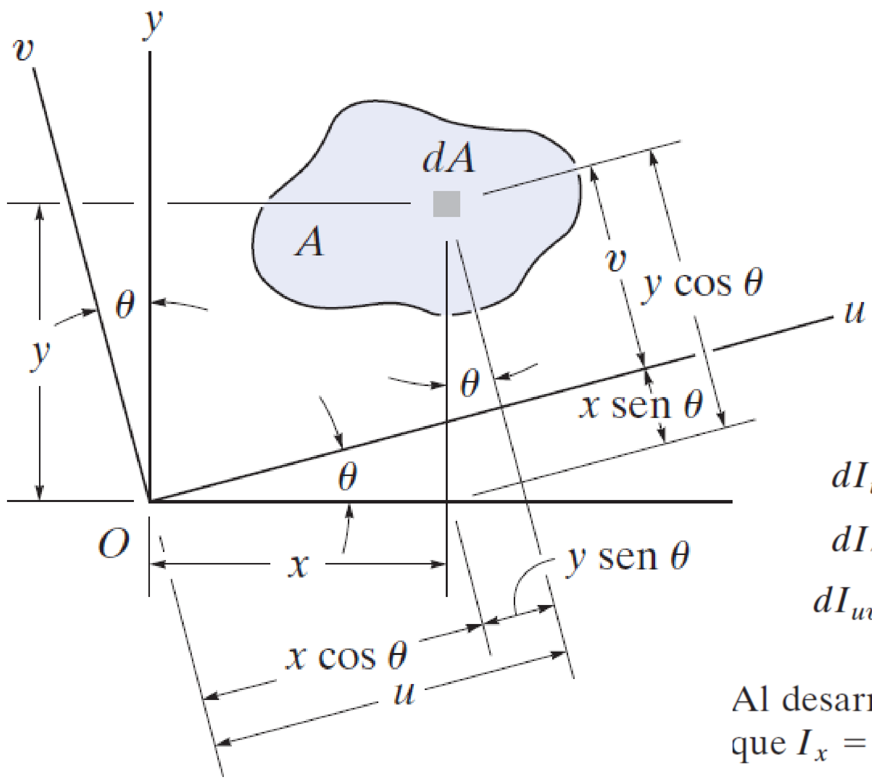
$$I_x = 2\left(14,25\times10^8\right)+0,5\times10^8 = 29\times10^8\,mm^4$$

$$I_y = 2(19\times10^8)+18\times10^8 = 56\times10^8\,mm^4$$

$$I_{xy} = 2(-15\times10^8)+0 = -30\times10^8\,mm^4$$

$$\begin{pmatrix} 29 & -30 \\ -30 & 56 \end{pmatrix}10^8$$

Momentos de inercia para un área con respecto a ejes inclinados



$$u = x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta$$
$$v = y \cos\theta - x \operatorname{sen}\theta$$

$$dI_u = v^2\, dA = (y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$dI_v = u^2\, dA = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)^2\, dA$$
$$dI_{uv} = uv\, dA = (x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta)(y\cos\theta - x\operatorname{sen}\theta)\, dA$$

Al desarrollar cada expresión e integrarlas, así como tener presente que $I_x = \int y^2\, dA$, $I_y = \int x^2\, dA$ e $I_{xy} = \int xy\, dA$, obtenemos

$$I_u = I_x \cos^2\theta + I_y \operatorname{sen}^2\theta - 2I_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$I_v = I_x \operatorname{sen}^2\theta + I_y \cos^2\theta + 2I_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$I_{uv} = I_x \operatorname{sen}\theta\cos\theta - I_y \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_{xy}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\operatorname{sen} 2\theta$$

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2}\operatorname{sen} 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

Momentos de inercia principales. Las ecuaciones muestran que Iu, Iv e Iuv dependen del ángulo de inclinación θ de los ejes u, v. Ahora determinaremos la orientación de esos ejes con respecto a los cuales los momentos de inercia del área son máximo y mínimo.

Este sistema particular de ejes se llama *ejes principales* del área, y los momentos de inercia correspondientes con respecto a esos ejes se llaman *momentos de inercia principales*. En general, hay un conjunto de ejes principales para cada origen *O* elegido. Sin embargo, para el diseño estructural y mecánico, el origen *O* se ubica en el centroide del área.

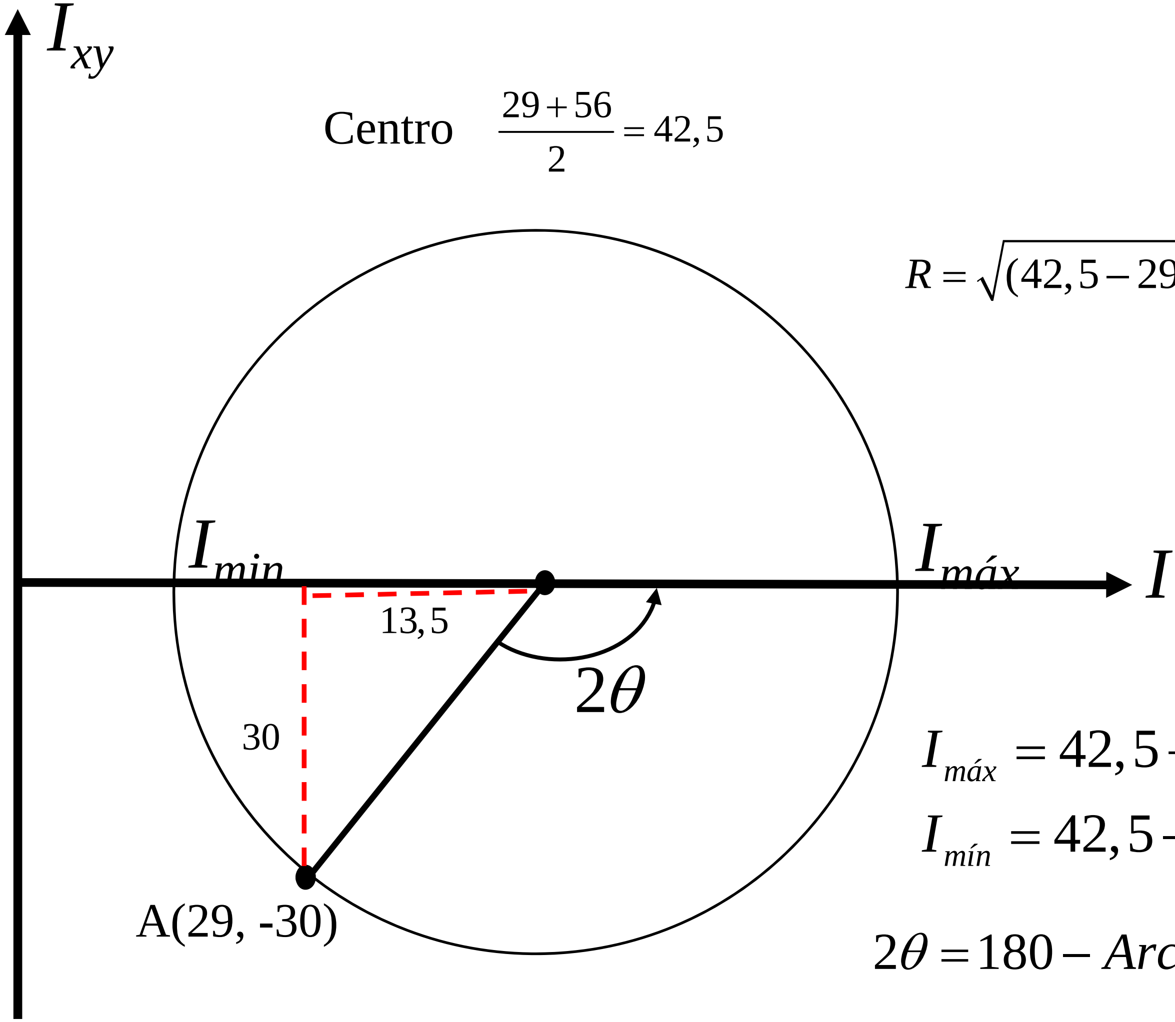
Círculo de Mhor

$$I_x = 2\left(14,25\times10^8\right) + 0,5\times10^8 = 29\times10^8\,mm^4$$

$$I_y = 2(19\times10^8) + 18\times10^8 = 56\times10^8\,mm^4$$

$$I_{xy} = 2(-15\times10^8) + 0 = -30\times10^8\,mm^4$$

- Determinar I_x , I_y, I_{xy}
- Construir un sistema coordenado rectangular de modo que la abscisa represente el momento de inercia I, y la ordenada el producto de inercia I_{xy}
- Determinar el centro O del círculo $\frac{(I_x + I_y)}{2}$ y localizar el punto A (I_x , I_{xy})
- Conectar el punto A con el centro del circulo, determinar la distancia OA por trigonometría. Esta distancia es el radio de circulo. Dibujar el círculo.



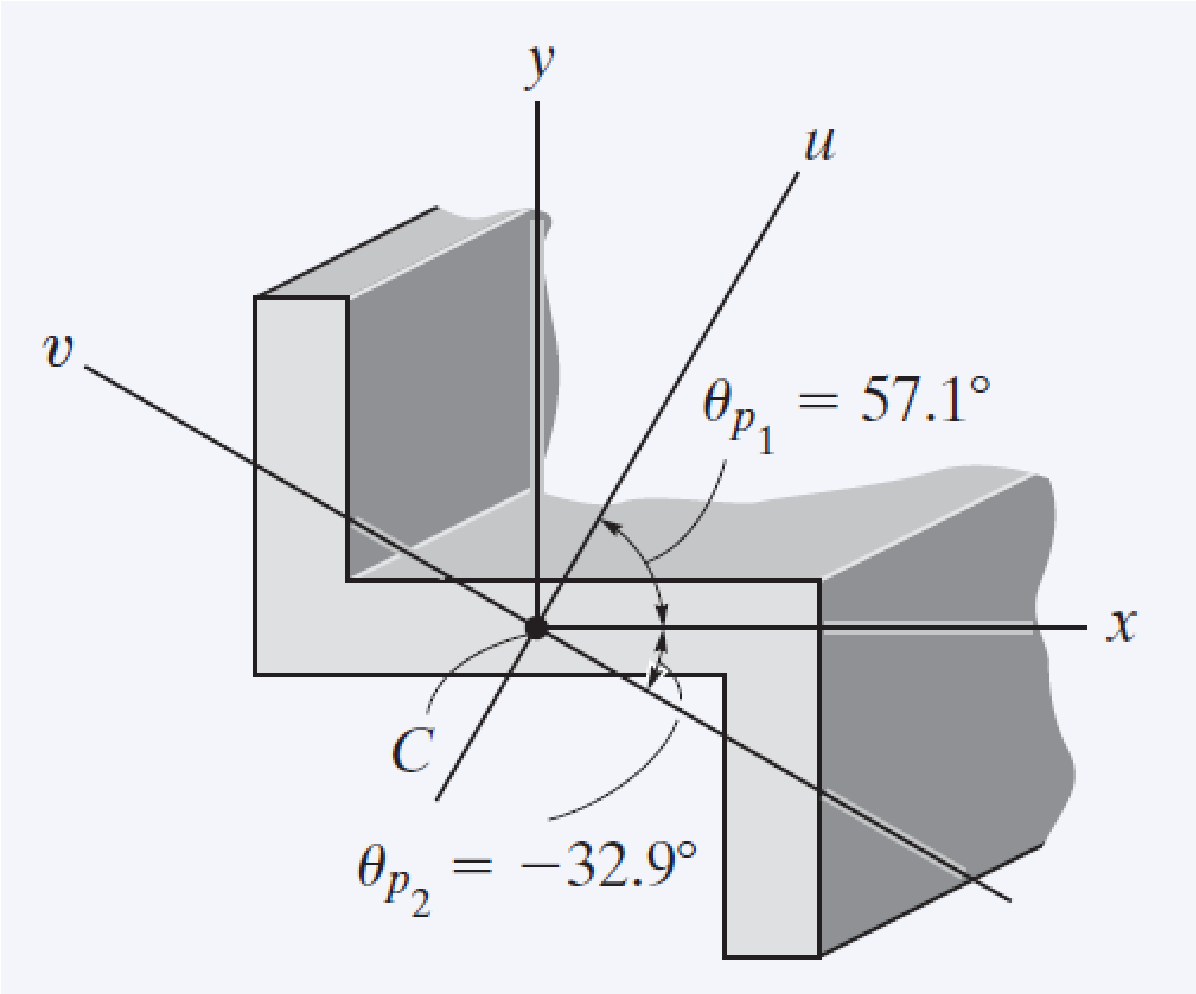
Centro $\dfrac{29+56}{2} = 42,5$

$$R = \sqrt{(42,5-29)^2 + (-30)^2} = 32,90$$

$$I_{máx} = 42,5 + 32,90 = 75,40$$

$$I_{mín} = 42,5 - 32,90 = 9,60$$

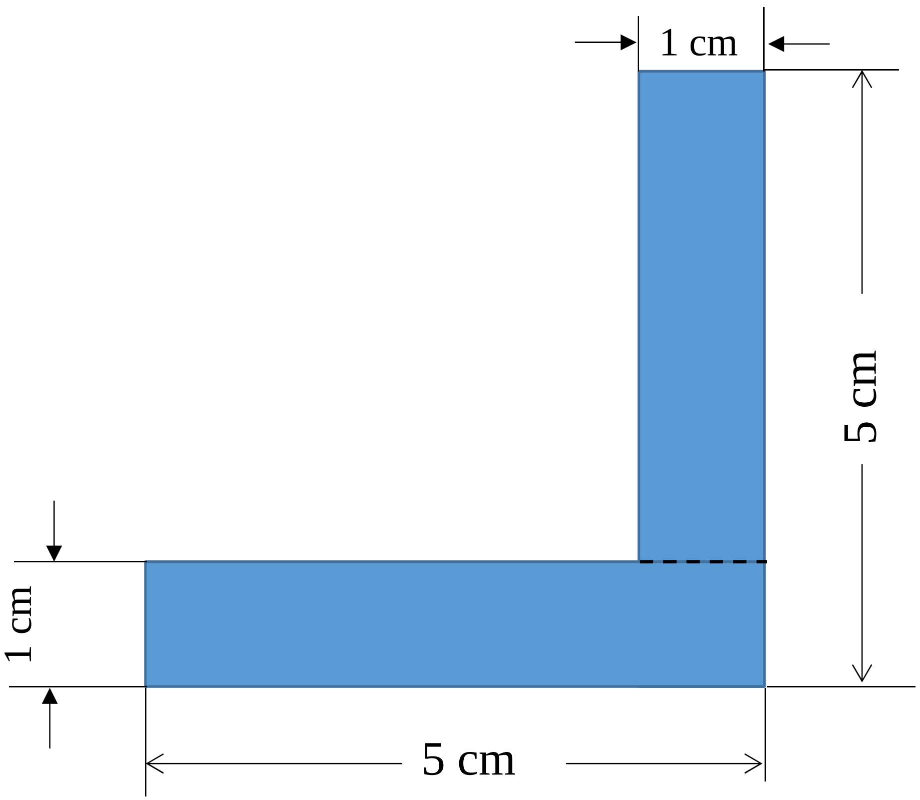
$$2\theta = 180 - Arc\tan\frac{30}{13,5} = 114,2^{o}$$



y
u
v
$\theta_{p_1} = 57.1°$
x
C
$\theta_{p_2} = -32.9°$

Ejemplo completo 7-12

Calcular los momentos de inercia principales respecto al centroide para una sección en L como muestra la figura



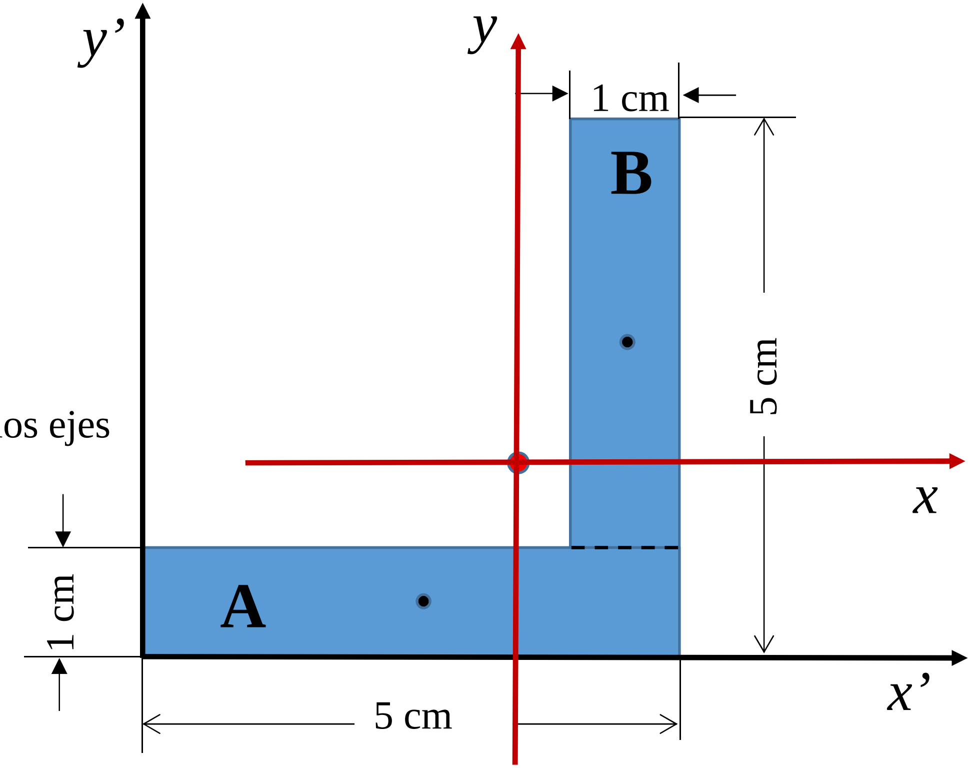
Ejemplo completo 7-12

1. Calculamos los centros de cada una de las partes en que consideramos dividida la pieza

Parte A (2,5 ; 0,5) ; área = 5 cm^2

Parte B (4,5 ; 3) ; área = 4 cm^2

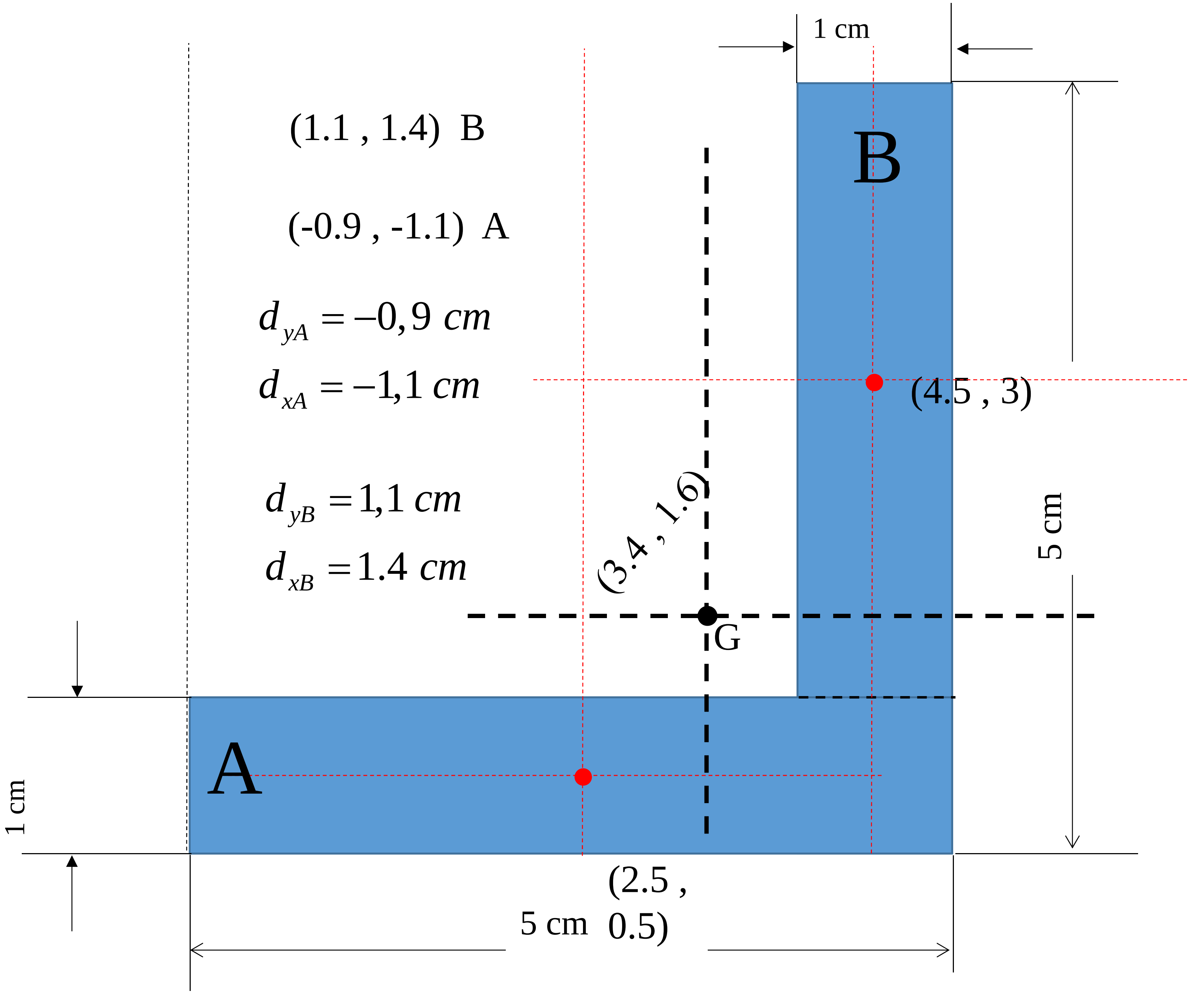
$$(x_C\ ,\ y_C) = \frac{5\times(2.5\ ,\ 0.5)+4\times(4.5\ ,\ 3)}{9} = (3.4\ ,\ 1.6)$$



Distancias de los centros de cada una de las partes a los ejes que pasa por el centroide de la pieza:

$$d_{yB} = 1{,}1\ cm \quad d_{xB} = 1{,}4\ cm$$

$$d_{yA} = -0{,}9\ cm \quad d_{xA} = -1{,}1\ cm$$

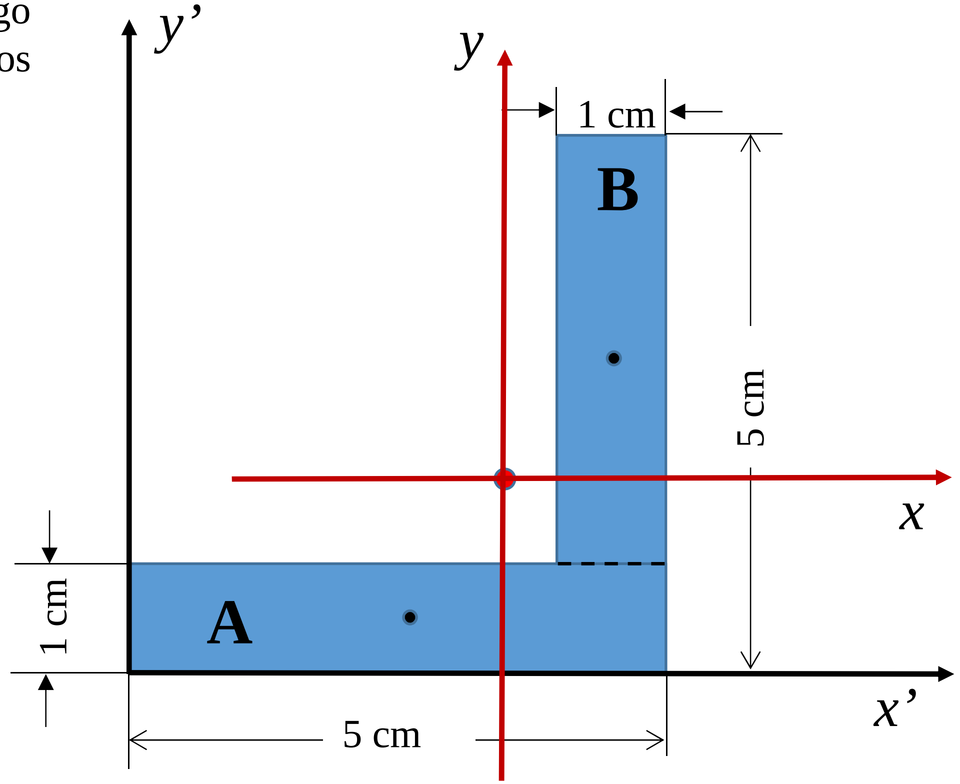

1 cm
(1.1 , 1.4) B
(-0.9 , -1.1) A
$d_{yA} = -0,9\ cm$
$d_{xA} = -1,1\ cm$
$d_{yB} = 1,1\ cm$
$d_{xB} = 1.4\ cm$
B
(4.5 , 3)
(3.4 , 1.6)
5 cm
G
A
1 cm
(2.5 ,
0.5)
5 cm

Ejemplo completo 7-12

$$d_{yB} = 1{,}1\ cm \quad d_{xB} = 1{,}4\ cm$$

$$d_{yA} = -0{,}9\ cm \quad d_{xA} = -1{,}1\ cm$$

2. Calculamos los momentos de cada una de las partes respecto a los ejes que pasan por sus centros y luego aplicamos el teorema de los ejes paralelos para calcular los momentos respecto a los ejes x e y



Parte B

$$I_x = \frac{1}{12} 1 \times 4^3 + 4 \times 1{,}4^2 = 13{,}17\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} 4 \times 1^3 + 4 \times 1{,}1^2 = 5{,}17\ cm^4$$

Parte A

$$I_x = \frac{1}{12} 5 \times 1^3 + 5 \times 1{,}1^2 = 6{,}47\ cm^4$$

$$I_y = \frac{1}{12} 1 \times 5^3 + 5 \times 0{,}9^2 = 14{,}47\ cm^4$$

Pieza completa

$$I_x = 13{,}17 + 6{,}47 = 19{,}6\ cm^4$$

$$I_y = 5{,}17 + 14{,}47 = 19{,}6\ cm^4$$

Ejemplo completo 7-12

$$d_{yB} = 1{,}1\ cm \quad d_{xB} = 1{,}4\ cm$$

$$d_{yA} = -0{,}9\ cm \quad d_{xA} = -1{,}1\ cm$$

3. Calculo de los productos de inercia

Parte B

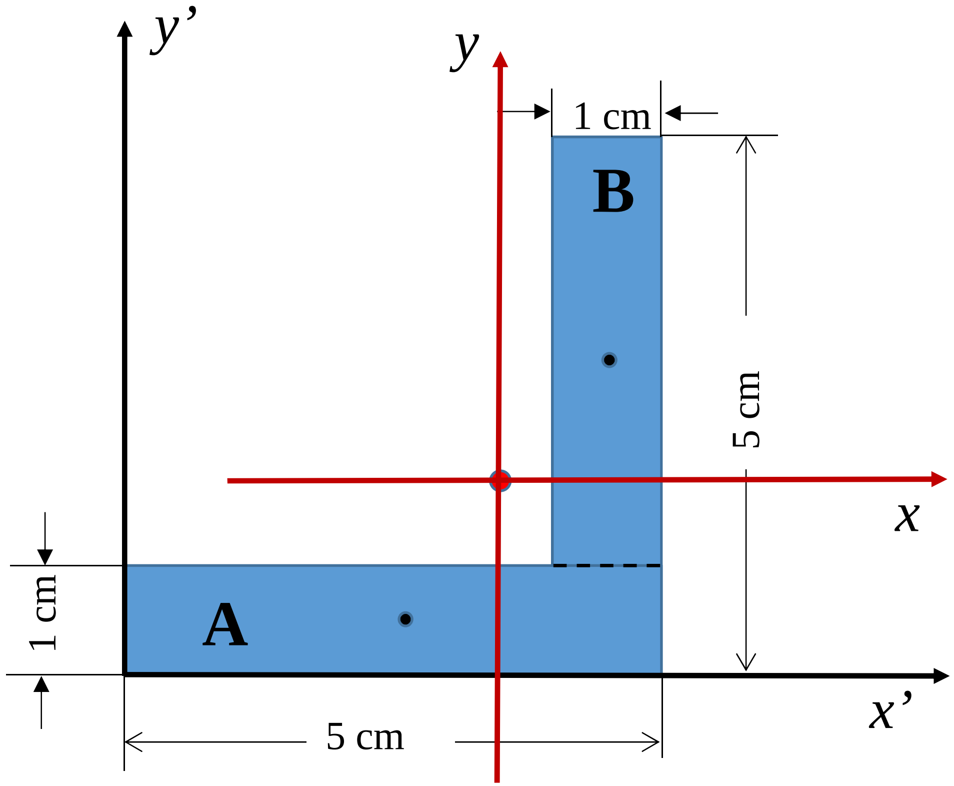
$$I_{xy} = 0 + 4 \times 1{,}4 \times 1{,}1 = 6{,}16\ cm^4$$

Parte A

$$I_{xy} = 0 + 5 \times (-0{,}9) \times (-1{,}1) = 4{,}95\ cm^4$$

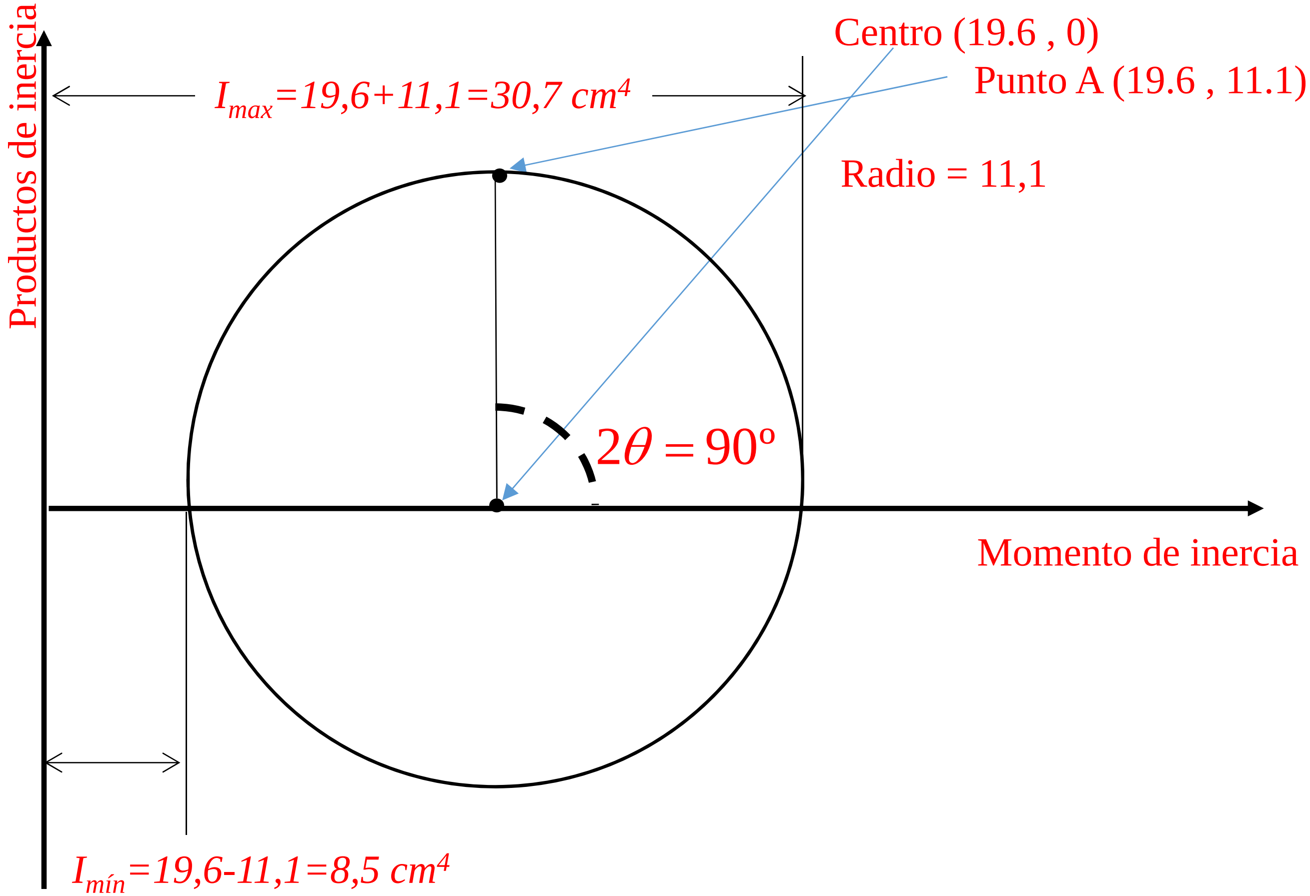
Pieza completa

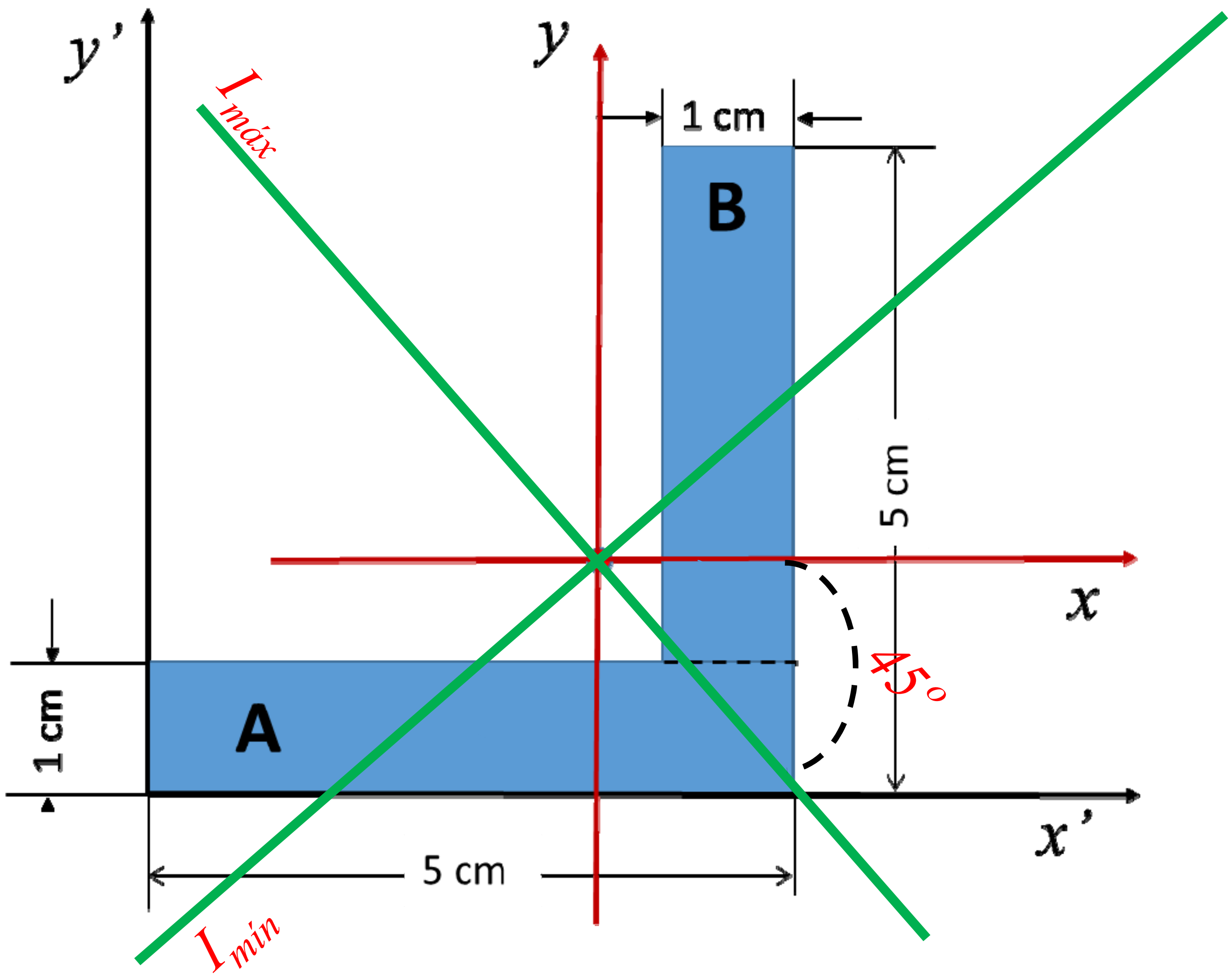
$$I_{xy} = 6{,}16\ cm^4 + 4{,}95\ cm^4 = 11{,}1\ cm^4$$



Ejemplo completo 7-12

4. Circulo de Mhor





y'
y
$I_{máx}$
1 cm
B
5 cm
x
45°
1 cm
A
x'
5 cm
I_{min}