Examen primer parcial

(4 de noviembre de 2017)

Estudiante —————————————————————————**GRUPO**

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- a) Realice las siguientes operaciones: a) $8,53 \times 0,407$. b) $38/285,3$. c) $34,6+17,86+15$ d) $20,02+20,002+20,0002$

Solución:

$$8,53 \times 0,407 = 3,47$$

$$38/285,3 = 0,13$$

$$34,6+17,86+15 = 68$$

$$20,02+20,002+20,0002 = 60,02$$

b) La fuerza gravitaroria con la cual se atraen dos partículas, viene dada por:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

en donde G es la constante de gravitación universal m_i las masas de las partículas y r la distancia que las separa. Obtenga la ecuación de dimensiones de G

Solución:

$$\left|\vec{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $[F] = MLT^{-2}$, despejando G de la ecuación [2]

$$[G] = \frac{MLT^{-2}LL}{MM} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

por consiguiente las unidades $[G]$ en el sistema internacional serán $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

2.- a) Sabiendo que $1\,kp = 9,81\,N$. Exprese la presión de $0,020\,kp/mm^2$ en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

Solución:

$$0,020\,kp/mm^2 = \frac{0,020 \times 9,81N}{(10^{-3}m)^2} = 2,0 \times 10^5\ N \cdot m^{-2}$$

b) Si la densidad de cierto hormigón es $\rho = 2,4\, g \cdot cm^{-3}$, obtenga, de forma razonada, su valor en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

$$\rho = 2,4\, g \cdot cm^{-3} = \frac{2,4 \times 10^{-3} kg}{(10^{-2} m)^3} = 2,4 \times 10^3 kg \cdot m^{-3}$$

3.- Dados los puntos:

$$A(2,1,1) \qquad ; \qquad B(1,-1,2) \qquad ; \qquad C(3,2,2)$$

Obtenga: a) Ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. b) Proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre el vector $\overrightarrow{AC}$.

Solución:

Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ vienen dados:

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\,;\ \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

El ángulo que forman dichos vectores es:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} \qquad \theta = \arccos\frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = 118^0$$

$$P\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\theta = \sqrt{6} \times \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} = -1,15m$$

4.- a) Defina producto vectorial de dos vectores. b) Obtenga el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ obtenidos en la cuestión 3. Compruebe que dicho vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y al vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

para comprobar que este vector es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB}$ y al vector $\overrightarrow{AC}$ realizamos el producto escalar, cuyo valor tiene que ser 0

$$\overrightarrow{AB} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = (-1) \times (-3) + (-2) \times 2 + 1 \times 1 = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \bullet \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) = (1) \times (-3) + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 0$$

5.- a) Par de fuerzas. Definición . b)Razone y explique por qué el momento de un par de fuerzas es un vector libre. (No depende del punto O respecto al cual se calcula el momento)

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 Dos cables se amarran en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión a) en el cable AC y b) en el cable BC

Solución:

La expresión vectorial de las tres fuerzas que actúan en el punto C viene dada por:

$$-T_{CA}\cos 40^0\vec{i} + T_{CA}\sin 40^0\vec{j}$$
$$-T_{CB}\cos 60^0\vec{i} - T_{CB}\sin 60^0\vec{j}$$
$$500\vec{i} + 0\vec{j}$$

Al estar el punto C en equilibrio la suma de las tres expresiones anteriores tiene que ser cero, de donde, obtenemos dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$-T_{CA}\cos 40^0 - T_{CB}\cos 60^0 + 500 = 0 \quad (3)$$

$$T_{CA}\sin 40^0 - T_{CB}\sin 60^0 = 0 \quad (4)$$

y al resolver las ecuaciones 3 y 4 se obtiene:

$$T_{CA} = 440\ N\ ;\ T_{CB} = 326\ N$$

.

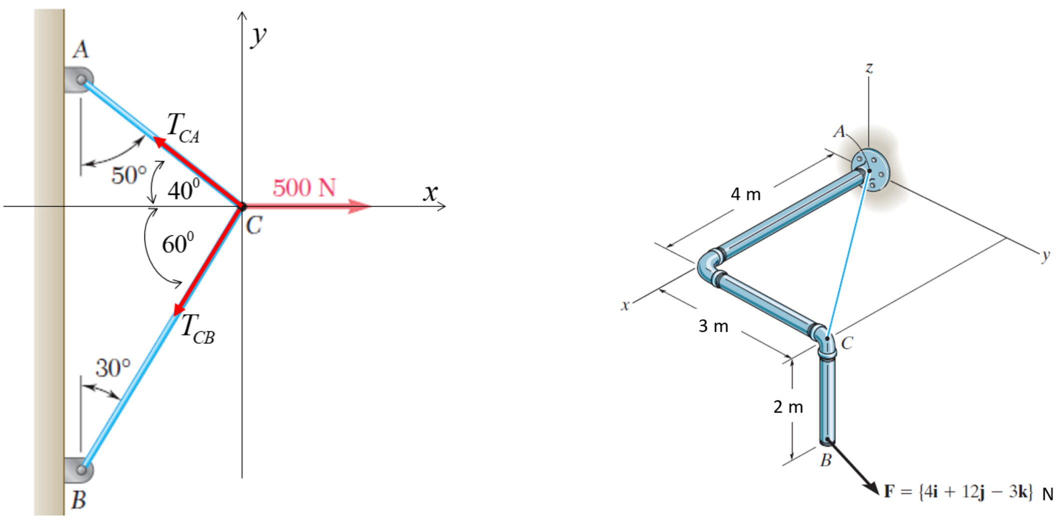

Figure 1: *Problemas 1 y 2*

Problema 2 a) Determine el momento producido por la fuerza $\vec{F}$ que se muestra en la figura, respecto a un eje que pasa por AC.

Solución:

Primero vamos a obtener, el vector unitario en la dirección del eje:

$$\overrightarrow{AC} = 4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_{eje} = \frac{4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{1}{5}\left(4\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\right) = 0,8\,\vec{i} + 0,6\,\vec{j}$$

a continuación calculamos el momento de la fuerza $\vec{F}$ respecto de un punto cualquiera del eje, por ejemplo respecto al punto C , para ello obtenemos el vector $\overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{CB} = -2\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M}_C = \overrightarrow{CB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 24\,\vec{i} - 8\,\vec{j}\;N \cdot m$$

y ahora proyectamos dicho momento sobre el eje,

$$M_{eje} = \overrightarrow{M}_C \bullet \vec{u}_{eje} = 24 \times 0,8 + (-8) \times 0,6 = 14,4\;N \cdot m$$

También, puede obtenerse M_{eje} calculando el producto mixto de los vectores $\vec{u}_{eje}$, $\overrightarrow{QA}$ y $\vec{F}$

$$M_{eje} = \begin{vmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 4 & 12 & -3 \end{vmatrix} = 14,4\;N \cdot m$$

Problema 3 Si se sabe que la tensión en el cable AB es de $1425N$, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre la placa en el punto B . Calcule el ángulo que dicha fuerza forma con cada uno de los ejes de coordenadas.

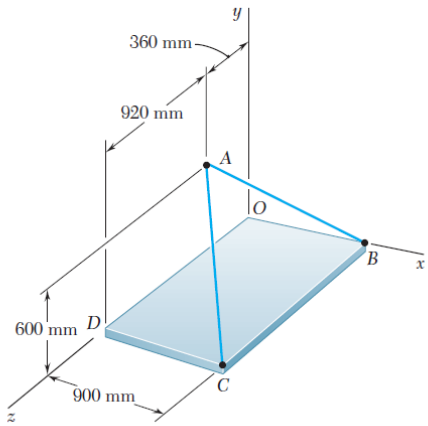

Figure 2: *Problema 3*

Solución:

Previamente, calculamos el vector $\overrightarrow{BA} = -0,9\,\vec{i} + 0,6\,\vec{j} + 0,36\,\vec{k}$, el cual se obtiene restando a las coordenadas del extremo $A(0, 0.6{,}0.36)$ las coordenadas del origen $B(0.9, 0, 0)$

$$\vec{u}_{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|} = \frac{-0,9\,\vec{i} + 0,6\,\vec{j} + 0,36\,\vec{k}}{\sqrt{0,9^2 + 0,6^2 + 0,36^2}} = \frac{1}{1,14}\left(-0,9\,\vec{i} + 0,6\,\vec{j} + 0,36\,\vec{k}\right) \tag{5}$$

Entonces la expresión vectorial de $\vec{F}$, al igual, que la de cualquier vector, viene dada por:

$$\vec{F} = 1425\,\vec{u}_{BA} = -1,12 \times 10^3\,\vec{i} + 750\,\vec{j} + 450\,\vec{k} \quad N$$

siendo los cosenos directores las componentes del vector unitario.

$$cos\theta_x = \frac{-0,9}{1,14}\ ;\ cos\theta_y = \frac{0,6}{1,14}\ ;\ cos\theta_z = \frac{0,36}{1,14}$$

luego:

$$\theta_x = Arccos\frac{-0,9}{1,14} = 142^o\ ;\ \theta_y = Arccos\frac{0,6}{1,14} = 58,2^0\ ;\ \theta_z = Arccos\frac{0,36}{1,14} = 71,6^o$$

Problema 4 Si la masa del bote de la figura 3 cuyo centro de gravedad es tá situado en G_1 es de $2\,kg$ y la masa del listón articulado en B es de $1,2\,kg$ estando situado su centro de gravedad en G_2. Determine la tensión del cable CD y las reacciones en la articulación B

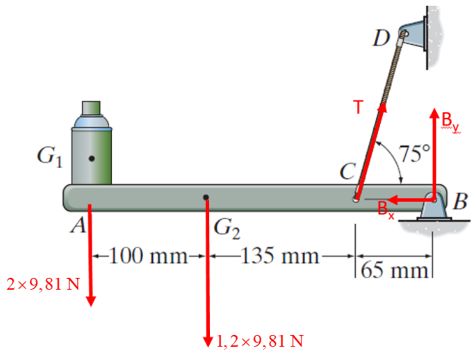

Figure 3: *Problema 4*

Solución:

Si el listón está en equilibrio se tiene que cumplir:

$$\sum F_x^{ext} = 0; \Longrightarrow T\cos 75^0 - B_x = 0 \tag{6}$$

$$\sum F_y^{ext} = 0; \Longrightarrow T\sin 75^0 + B_y - 2\times 9,81 - 1,2\times 9,81 = 0 \tag{7}$$

$$\sum M_B^{F_{ex}} = 0; \Longrightarrow -T\sin 75^0 \times 0,065 + 2\times 9,81\times 0,3 + 1,2\times 9,81\times 0,2 = 0 \tag{8}$$

De la ecuación 8 se obtiene:

$$T = 131\ N$$

y al sustituir sucesivamente en las ecuaciones 7 y 6 :

$$B_y = -95,4\ N\ ;\ B_x = 34,0\ N$$

en donde el signo negativo de B_y significa que su sentido real es contrario al supuesto inicialmente, es decir hacia abajo.

Problema 5 Dada la armadura de la figura. a) Encuentre los elementos de fuerza cero b) Verifique que es una estructura isostática. c) Determine la fuerza en cada una de las articulaciones A y B, así como en cada uno de los elementos (barras). Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.d) Escriba las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nodos. Exprese de forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene.

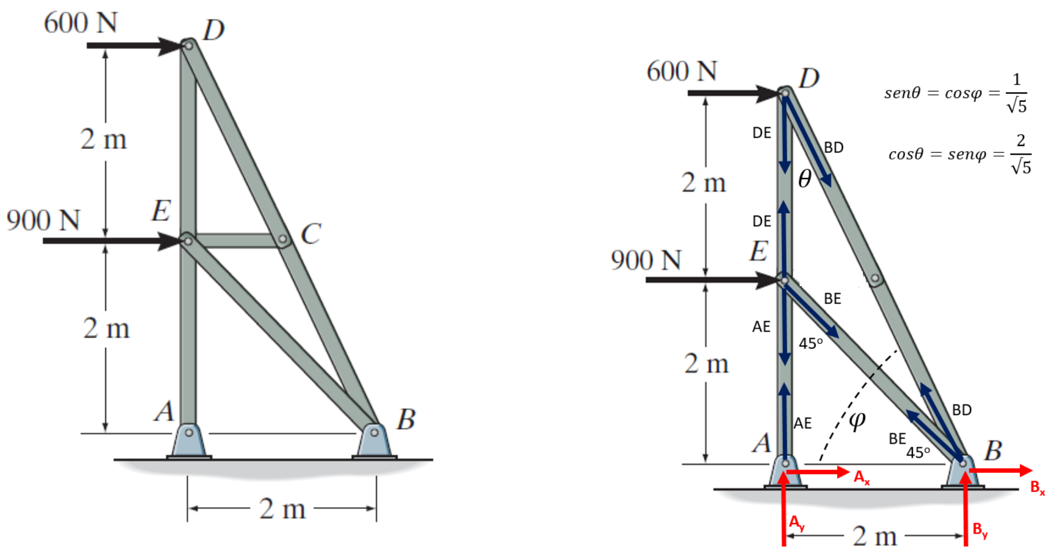

Figure 4: *Armadura problema 2*

Solución:

a) El elemento EC es un elemento de fuerza cero, dado que en el nodo C existen tres elementos, siendo dos de ellos colineales (CD y CB) por tanto el tercer elemento el CE es un elemento de fuerza cero.

b) Después de eliminar la barra EC la armadura consta de 4 nodos y 4 barras siendo 4 las reacciones a determinar, ya que se tienen dos articulaciones. Se cumple que:

$$2N = B + R \quad ; 2 \times 4 = 4 + 4$$

En la figura de la derecha se muestran las fuerzas (las suponemos todas ellas en tensión) en cada uno de los nodos.

Procedimiento 1

En primer lugar aplicamos las condiciones de equilibrio a las fuerzas exteriores; como son dos articulaciones se han dibujado en cada una de ellas una fuerza horizontal y otra vertical.

$$\sum F_x = 0; \Longrightarrow A_x + B_x + 1500 = 0 \tag{9}$$

$$\sum F_y = 0; \Longrightarrow A_y + B_y = 0 \tag{10}$$

$$\sum M_A = 0; \Longrightarrow B_y \times 2 - 600 \times 4 - 900 \times 2 = 0 \tag{11}$$

De la ecuación 11 se obtiene, que $B_y = 2100\ N$ y teniendo en cuenta la ecuación 10 $A_y = -2100\ N$. El signo negativo significa que su sentido es contrario al supuesto. Las fuerzas en el nodo A quedan como indica la figura

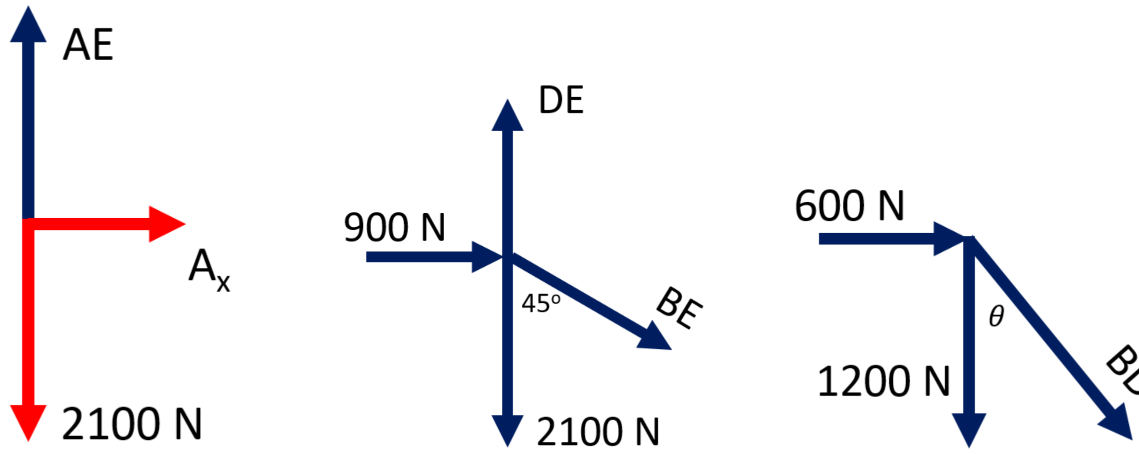

Figure 5: *Nodos armadura problema 2*

Observando el nodo A :

$$A_x = 0 \tag{12}$$

$$AE - 2100 = 0 \tag{13}$$

luego teniendo en cuenta las ecuaciones 12 y 9 se obtiene que:

$$B_x = -1500\ N$$

y de la ecuación 13

$$AE = 2100\ N$$

El valor de AE, se muestra en la figura correspondiente al nodo E , para el cual escribimos las ecuaciones de equilibrio:

$$900 + BE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{14}$$

$$DE - 2100 - BE\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \tag{15}$$

de la ecuación 14

$$BE = -\frac{1800}{\sqrt{2}} = -1,27 \times 10^3\ N$$

que al sustituirlo en la ecuación 15 se obtiene:

$$DE = 1200\,N$$

los signos obtenidos, nos indican que la barra BE trabaja a *«compresión»* y las barras DE y AE a *«tracción»* (*«tensión»*).

El valor obtenido para DE lo llevamos al nodo D, de la figura se obtiene:

$$600 + BD\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \tag{16}$$

$$-1200 - BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \tag{17}$$

las ecuaciones obtenidas son idénticas, cuya solución es:

$$BD = -600\sqrt{5} = -1,34 \times 10^3\,N$$

por tanto, la barra BD trabaja a *«compresión».*

No ha sido necesario recurrir al nodo B , ahora bien, si sustituimos todos los valores encontrados BE, BD, B_x, B_y la sumatoria de todas ellas es cero.

Procedimiento 2

Escribimos las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nodos:

$$nodo\ A \begin{cases} A_x = 0 \\ A_y + AE = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ B \begin{cases} B_x - BE\frac{\sqrt{2}}{2} - BD\frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \\ B_y + -BE\frac{\sqrt{2}}{2} + BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ D \begin{cases} BD\frac{1}{\sqrt{5}} + 600 = 0 \\ -DE - BD\frac{2}{\sqrt{5}} = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ E \begin{cases} BE\frac{\sqrt{2}}{2} + 900 = 0 \\ -AE - BE\frac{\sqrt{2}}{2} + DE = 0 \end{cases}$$

Aunque su resolución es sencilla, podemos formar, con las 8 ecuaciones anterioress el sistema matricial :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ AE \\ BD \\ BE \\ DE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -600 \\ 0 \\ -900 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La resolución da como resultado:

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ B_x \\ B_y \\ AE \\ BD \\ BE \\ DE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2,10 \\ 1,50 \\ 2,10 \\ 2,10 \\ -1,34 \\ -1,27 \\ 1,20 \end{pmatrix} \times 10^3\, N$$

Resultado que coincide con el encontrado mediante el procedimiento 1.

Criterios de calificación:

Cuestion 1 (3 puntos) , cuestión 2 (1 punto), cuestiones 3,4 y 5 (2 puntos cada una) . Hay que obtener **un mínimo de 3 puntos** para poder promediar con la nota de problemas.

Problemas 1 y 4 dos puntos cada uno , problemas 2 y 3 (1,5 puntos cada uno), problema 5 tres puntos).

La nota del parcial se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Nota = 0,3 \times NC + 0,7 \times NP$$

en donde NC y NP es la puntuación obtenida en las cuestiones y problemas respectivamente.