UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

Examen Convocatoria enero 2016

FÍSICA I

Examen convocatoria enero 2016 PARTE 1

(12 de enero de 2016)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- a) Obtener las unidades en el S.I. (Sistema Internacional de Unidades) de la constante de Stefan-Boltzmann σ , que aparece en la expresión que nos muestra la potencia radiada por un cuerpo de área A que se encuentra a una temperatura T.

$$H = \sigma e A T^4 \tag{1}$$

$$\sigma = \frac{H}{eAT^4} = \frac{W}{m^2 T^4} = W m^{-2} T^{-4} \tag{2}$$

2.- Una fuerza $\vec{F}$ cuyo módulo $\left|\vec{F}\right| = 200\,N$ lleva la dirección del punto $A(2,1,3)$ al punto $B(2,5,6)$. Determine las componentes cartesianas de $\vec{F}$.

En primer lugar determinamos el vector $\overrightarrow{AB} = 4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}\;m$, el módulo de dicho vector es $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,m$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1}{5}\left(4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}\right)$$

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right|\vec{u}_{AB} = 200\frac{1}{5}\left(4\,\vec{j} + 3\,\vec{k}\right) = 160\,\vec{j} + 120\,\vec{k}\;N$$

3.- Dados los vectores:

$$\vec{b} = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j} + 1\,\vec{k} \qquad ; \qquad \vec{a} = 6\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

Obtenga la proyección del vector $\overrightarrow{b}$ sobre el vector $\overrightarrow{a}$.

$$P_{\vec{b}_{\vec{a}}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{3 \times 6 + (-4) \times (-8)}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = 5$$

4.- Dada la fuerza $\vec{F} = 30\,\vec{i} - 40\,\vec{j} + 10\,\vec{k}$ N la cual está aplicada en el punto $A(2,1,3)$. Obtenga el momento de dicha fuerza respecto del eje Z.

Calculamos el momento de $\vec{F}$ con respecto a un punto cualquiera del eje, en este caso podemos tomar el origen $O(0,0,0)$, entonces $\vec{r} = 2\,\vec{i} + 1\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$, luego:

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 30 & -40 & 10 \end{vmatrix} = 130\,\vec{i} + 70\,\vec{j} - 110\,\vec{k}\;N \cdot m$$

ahora proyectamos sobre el eje, para lo cual realizamos el producto escalar del momento por el vector unitario del eje

$$M_{eje} = \left(130\,\vec{i} + 70\,\vec{j} - 110\,\vec{k}\,N \cdot m\right) \bullet \vec{k} = -110\,N \cdot m$$

se llega al mismo resultado, efectuando el producto mixto de los vectores:

$$\left\{\vec{u}_{eje}, \overrightarrow{r}, \vec{F}\right\} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 30 & -40 & 10 \end{vmatrix} = -110\,N \cdot m$$

5.- Calcular las tensiones T_{AB} y T_{AC} de la figura, sabiendo que la suma de las tres fuerzas es cero.

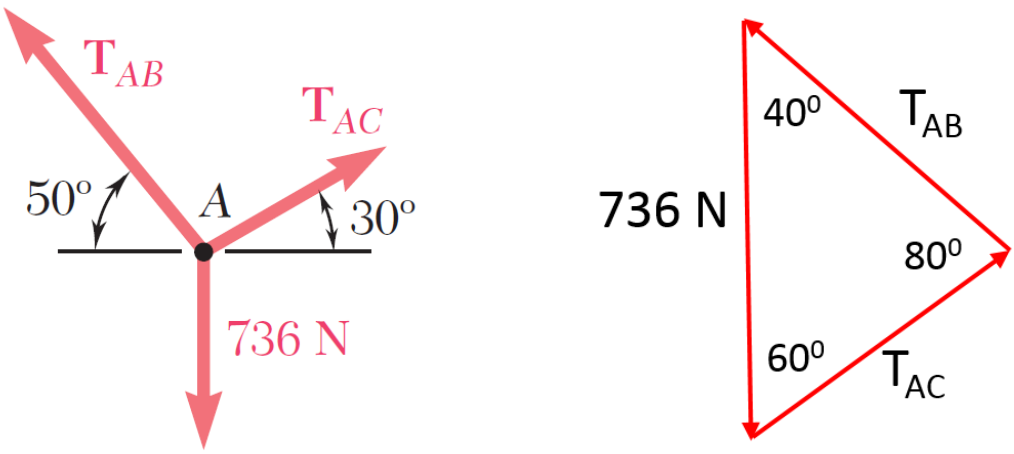


Figura 1: *Cuestión 5*

En la figura 2-b se han dibujado las tres fuerzas que actúan, una a continuación de la otra, al ser la suma cero, forman el triángulo que se muestra, y aplicando el teorema del seno a dicho triángulo, obtenemos las dos tensiones:

$$\frac{736\,kp}{sen80} = \frac{T_{AB}}{sen60} = \frac{T_{AC}}{sen40} \tag{3}$$

resolviendo las dos ecuaciones:

$$T_{AB} = sen60\frac{736\,kp}{sen80} = 647\,N$$

$$T_{AC} = sen40\frac{736\,kp}{sen80} = 480\,N$$

Podemos solucionar el ejercicio, obteniendo la expresión vectorial de cada una de las tres fuerzas y aplicar $\sum \vec{F} = \vec{0}$:

$$
\begin{aligned}
\vec{T}_{AC} &= T_{AC}cos30\,\vec{i} + T_{AC}sen30\,\vec{j} \\
\vec{T}_{AB} &= -T_{AB}cos50\,\vec{i} + T_{AB}sen50\,\vec{j} \\
& -736\,\vec{j}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

sumando las tres ecuaciones e igualando al vector cero, se tiene:

$$
(T_{AC}cos30 - T_{AB}cos50)\ \vec{i} + (T_{AC}sen30 + T_{AB}sen50 - 736)\ \vec{j} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} \tag{5}
$$

De la ecuación vectorial [5], obtenemos las dos ecuaciones escalares [6]

$$
\begin{aligned}
T_{AC}cos30 - T_{AB}cos50 &= 0 \\
T_{AC}sen30 + T_{AB}sen50 &= 736
\end{aligned}
\tag{6}
$$

y resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$
\begin{aligned}
T_{AC} &= 480\,N \\
T_{AB} &= 647\,N
\end{aligned}
$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 El tablón de la figura, se sostiene mediante una articulación B y un cable CD. a) Construya el diagrama del cuerpo libre para el tablón. b) Obtenga las reacciones en la articulación y la tensión del cable; suponiendo que el tablón tiene un peso de $800\,N$, actuando en el punto G_2 y que el peso que está soportando es de $200\,N$,

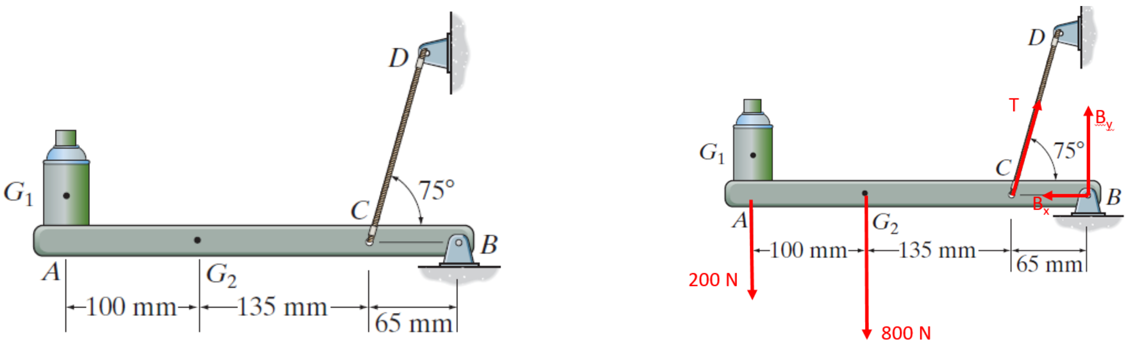


Figura 2: *Grúa problema 4*

Solución:

En la figura aparece representado el diagrama del cuerpo libre para el tablón. Puede observarse que existen tres incógnitas: las reacciones en la articulación B; $B_x B_y$ y la tensión del cable T, como podemos escribir tres ecuaciones ($\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$) para que el sistema esté en equilibrio, el problema lo tenemos totalmente determinado:

$$
\begin{aligned}
-B_x + Tcos75^o &= 0 \\
B_y + Tsen75^o - 200 - 800 &= 0 \\
200 \times 0,3 + 800 \times 0,2 - Tsen75^o \times 0,065 &= 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

en donde, por comodidad, hemos tomado momentos respecto al punto B, la resolución de este sistema de ecuaciones nos da:

$$B_x = 907N, \quad B_y = -2385\,N, \quad T = 3504\,N$$

El signo negativo de B_y nos indica que el sentido real es contrario al supuesto inicialmente, es decir, la reacción B_y en la articulación es hacia abajo.

Problema 2 La armadura de la figura está sometida a las cargas que se muestran. Determine, mediante el método de los nudos de Cremona, la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión. .

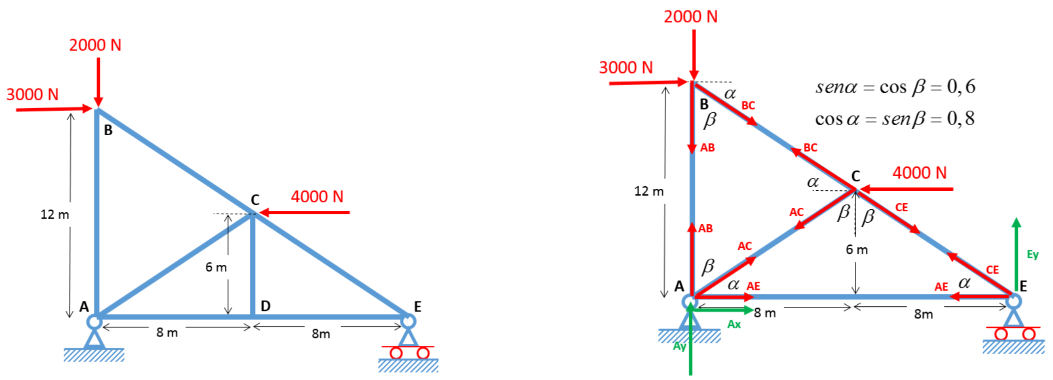


Figura 3: *Estrutura, y fuerzas que actúan en cada nodo*

Solución:

En la figura de la derecha se muestran las fuerzas (se han dibujando todas ellas en tensión) en cada uno de los nudos, así mismo puede observarse que se ha eliminado el elemento BD por ser un elemento de fuerza cero.

Procedimiento a

3 Tendremos en cuenta únicamente las fuerzas exteriores que actúan sobre la armadura; si se encuentra en equilibrio se tiene que cumplir:

$$\begin{gathered}\sum F_x^{ext} = 0 \Longrightarrow A_x - 4000 + 3000 = 0 \\ \sum F_y^{ext} = 0 \Longrightarrow A_y + E_y - 2000 = 0 \\ \sum M_A^{ext} = 0 \Longrightarrow E_y \times 16 + 4000 \times 6 - 3000 \times 12 = 0\end{gathered} \tag{8}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$A_x = 1000\,N; \quad A_y = 1250\,N; \quad E_y = 750\,N$$

Comenzamos por el nodo B pues en el sólo se tienen dos incógnitas AB y BC

$$\begin{gathered}0,8BC + 3000 = 0 \\ -0,6BC - AB - 2000 = 0\end{gathered} \tag{9}$$

la solución que se obtiene es:

$$BC = -3750\,N\ (compresión);\ AB = 250\,N\ (tensión)$$

A continuación seguimos en el nodo A

$$\begin{aligned} 1000 + AE + 0,8AC = 0 \\ 1250 + 250 + 0,6AC = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

cuya solución es:

$$AC = -2500\,N\ (compresión);\ AE = 1000\,N\ (tensión)$$

y por fin acabamos en el nodo E

$$\begin{aligned} -0,8CE - 1000 = 0 \\ 0,6CE + 750 = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

cualquiera de las dos ecuaciones nos conduce a:

$$CE = -1250\,N\ (compresión)$$

Procedimiento b

Escribimos las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nudos:

$$nodo\ A \begin{cases} A_x + 0,8AC + AE = 0 \\ A_y + AB + 0,6AC = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ B \begin{cases} 0,8BC + 3000 = 0 \\ -AB - 0,6BC - 2000 = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ C \begin{cases} -0,8AC - 0,8BC + 0,8CE - 4000 = 0 \\ -0,6AC + 0,6BC - 0,6CE = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ E \begin{cases} -AE - 0,8CE = 0 \\ E_y + 0,6CE = 0 \end{cases}$$

Con las 8 ecuaciones anteriores formamos el sistema matricial de la figura

Matriz coeficientes

	Ay	Ax	Ey	AB	AC	AE	BC	CE	INDEPEN.
Nodo A	0	1	0	0	0,8	1	0	0	0
	1	0	0	1	0,6	0	0	0	0
Nodo B	0	0	0	0	0	0	0,8	0	-3000
	0	0	0	-1	0	0	-0,6	0	2000
Nodo C	0	0	0	0	-0,8	0	-0,8	0,8	4000
	0	0	0	0	-0,6	0	0,6	-0,6	0
Nodo D	0	0	0	0	0	-1	0	-0,8	0
	0	0	1	0	0	0	0	0,6	0

Figura 4: *Sistema de ecuaciones en forma matricial*

siendo su solución:

Ay = 1250 N
Ax = 1000 N
Ey = 750 N
AB = 250 N Tensión
AC = -2500 N Compresión
AE = 1000 N Tensión
BC = -3750 N Compresión
CE = -1250 N Compresión

Figura 5: *Solución sistema de ecuaciones.*

Examen convocatoria enero 2016 PARTE 2

(12 de enero de 2016)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Un frasco de vidrio con volumen de $200\,cm^3$ se llena hasta el borde con mercurio a 20 ºC. ¿Cuánto mercurio se desbordará si la temperatura del sistema se eleva a 100 ºC ? Los coeficientes de dilatación cúbica del vidrio y mercurio son respectivamente:

$$\beta_{vidrio} = 1,2 \times 10^{-5} K^{-1}; \beta_{Hg} = 1,8 \times 10^{-4} K^{-1}; \quad (1)$$

Solución:

El mercurio se derramará puesto que al tener un coeficiente de dilatación cúbica mayor ocupará más volumen que el volumen del recipiente de vidrio; por consiguiente, la diferencia entre las variaciones de volumen ees lo que vamos a calcular:

$$\triangle V_{Hg} = V_0 \beta_{Hg} \triangle T \quad (2)$$

$$\triangle V_{vidrio} = V_0 \beta_{vidrio} \triangle T \quad (3)$$

restando las ecuaciones (2) y (3)

$$\triangle V_{Hg} - \triangle V_{vidirio} = V_0 \triangle T \left(\beta_{Hg} - \beta_{vidrio}\right) = 200(100-20)(1,8 \times 10^{-4} - 1,2 \times 10^{-5}) = 2,7\,cm^3$$

2.- Un cilindro de aluminio de $10\,cm$ de longitud, con área transversal de $20\,cm^2$, se utiliza como espaciador entre dos paredes de acero. A $17,2$ ºC el cilindro apenas se desliza entre las paredes. si se calienta a 30 ºC , ¿qué esfuerzo habrá en el cilindro y qué fuerza total ejercerá sobre cada pared, suponiendo que las paredes son perfectamente rígidas y están separadas por una distancia constante?

Datos para el aluminio: coeficiente de dilatación lineal $\alpha_{Al} = 2,4 \times 10^{-5} K^{-1}$; módulo de Young $\Upsilon = 7 \times 10^{11} Pa$

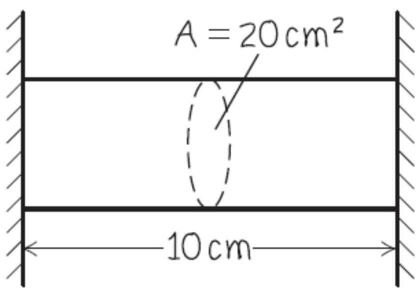


Figura 1: *Cuestión 2*

Solución:

El esfuerzo térmico viene dado por:

$$\frac{F}{A} = -\alpha \Upsilon \triangle T \tag{4}$$

Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (4)

$$\frac{F}{A} = -2,4 \times 10^{-5} \times 7 \times 10^{11} \times 12,8 = -2,1 \times 10^{8}\, Pa$$

El signo negativo nos indica que el cilindro de alumnio trabaja a compresión. La fuerza que ejercerá el cilindro sobre cada lado de pared viene dado por:

$$F = 20 \times 10^{-4} \times 2,1 \times 10^{8} = 4,2 \times 10^{5}\, N$$

3.- Una caja de espuma de poliestireno tiene un área de pared total (incluida la tapa) de $0,80m^2$y un espesor de pared de $2,0$cm , está llena de hielo, agua, y bebidas a $0\,^{\underline{o}}$C. Calcule la tasa de flujo de calor hacia el interior de la caja, si la temperatura exterior es de $30\,^{\underline{o}}$C . ¿Cuánto hielo se derrite en un día? Datos: calor latente de fusión del hielo $L = 3,34 \times 10^5\, J \cdot kg^{-1}$; conductividad térmica del poliestireno $\kappa = 0,010\mathrm{Wm}^{-1}\mathrm{K}^{-1}$

Solución:

En primer lugar vamos a calcular la resistencia térmica de la caja:

$$R = \frac{1}{\kappa}\frac{\triangle x}{A} = \frac{2 \times 10^{-2}m}{0,010Wm^{-1}K^{-1} \times 0,8m^2} = 2,5\, W^{-1}K$$

entonces la corriente térmica que se establece entre el exterior y el interior de la caja

$$H = \frac{\triangle T}{R} = \frac{30}{2,5} = 12\, W \tag{5}$$

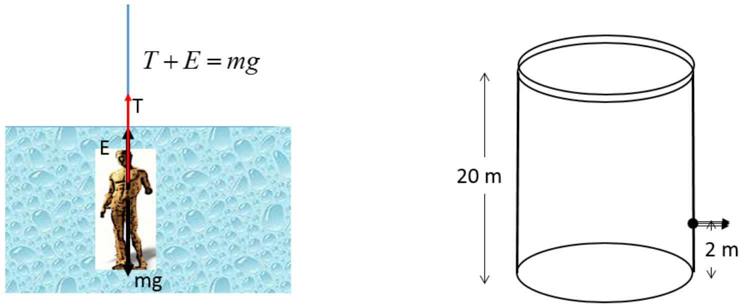
durante un día la energía en forma de calor que se introduce en el interior de la caja es

$$Q = Ht = 12 \times 24 \times 3600 = 1,04{\times}10^6\, J$$

igualando este resultado a la cantidad de energía que una masa m de hielo necesita para fundirse:

$$1,04{\times}10^6 = mL = m3,34 \times 10^5 \Longrightarrow m = 3,1\, kg$$

4.- Una estatua de oro sólido de $15,0\, kg$ de masa está siendo levantada de un barco hundido. ¿Qué tensión hay en el cable cuando la estatua está a) en reposo y totalmente sumergida, y b) en reposo y fuera del agua? Dato: $\rho_{oro} = 1,93 \times 10^4 kg \cdot m^{-3}$



Cuestión 4 Cuestión 5

Figura 2: *Cuestiones 4 y 5*

Solución:

a) Al estar en equilibrio se tiene que cumplir:

$$T + E = mg \Longrightarrow T = mg - E \tag{6}$$

por otra parte el empuje E es igual al peso de agua desalojada,

$$E = V_{des}\rho_a g = \frac{15}{1,93 \times 10^4} 10^3 \times 9,8 = 7,62\,N \tag{7}$$

sustituyendo este valor en la ecuación (6)

$$T = 15 \times 9{,}8 - 7{,}62 = 139,4\,N$$

b) al estar fuera del agua el empuje es cero, luego la tensión conincide con el valor del peso

$$T = mg = 15 \times 9,8 = 147\,N$$

5.- Un gran depósito cilíndrico sin tapa, está lleno de agua ($\rho_{agua} = 1g \cdot cm^{-3}$) hasta una altura de 20 m, se realiza un pequeño orificio a 2 m de su base. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre el orificio y un punto de la superficie del depósito, obtenga de forma razonada la velocidad con la cual sale el agua por el orificio. Tomar el valor de $g = 9,8\,ms^{-2}$

Solución:

Si consideramos que la sección del orificio es muy pequeño comparado con la sección de la superficie del depósito, la velocidad del agua en la superficie del depósito es prácticamente cero. La presión en la superficie del cilindro es la atmosférica al igual que en el orificio, por tanto:

$$P_{at} + \rho g 20 + 0 = P_{at} + \rho g 2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{8}$$

de la ecuación (8)

$$v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 18} = 18,8\,ms^{-1}$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 El muro de contención a gravedad esta hecho de concreto. Determine la ubicación$(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa G para el muro.

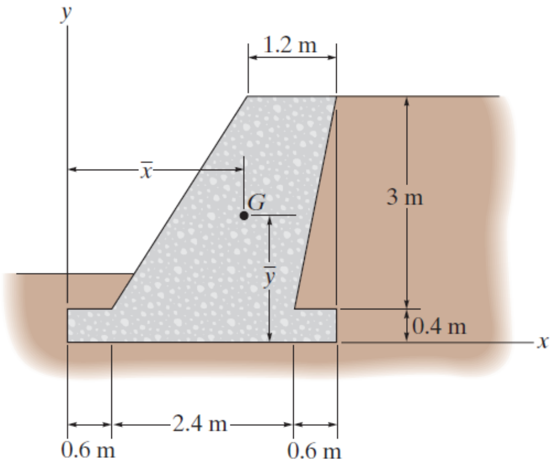


Figura 3: *Muro, problema 1*

Solución:

De la figura se observa que puede descomponerse en cuatro figuras: un rectángulo de lados $2,4\,m \times 0,4\,m$ un triángulo de $1,8\,m$ de base y $3\,m$ de alto, un rectángulo de lados $1,3\,m \times 3,4\,m$ y un triángulo de $0,6\,m$ de base y $3\,m$ de alto cuya área consideraremos negativa.

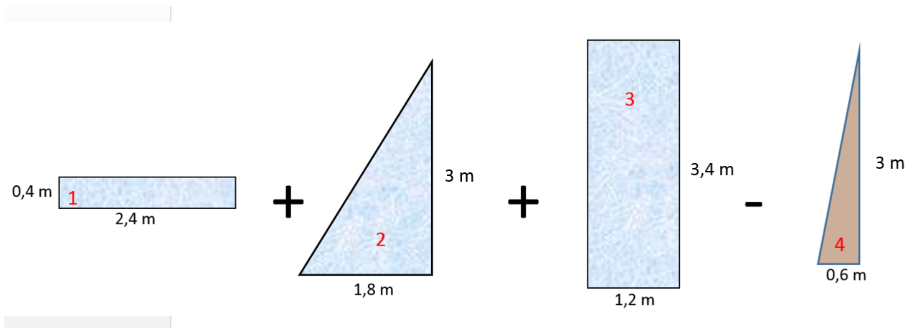


Figura 4: *Figuras en que se descompone el área del muro*

Construimos el siguiente cuadro:

	A_i (m^2)	x_i (m)	y_i (m)	$A_i x_i$ (m^3)	$A_i y_i$ (m^3)
0,4 m 1 2,4 m	0,96	1,2	0,2	1,15	0,19
3 m 2 1,8 m	2,7	1,8	1,4	4,86	3,78
3 3,4 m 1,2 m	4,08	3	1,7	12,24	6,94
3 m 4 0,6 m	-0,9	3,4	1,4	-3,06	-1,26
$\sum$	6,84			15,19	9,65

Figura 5: *Cuadro para la determinación del centroide*

luego:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} = \frac{15,19}{6,84} = 2,22\,m$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{9,65}{6,84} = 1,41\,m$$

Problema 2 a) Determine el producto de inercia y los momentos de inercia de esta área con respecto a los ejes centroidales $x^{'}$, $y^{'}$. b) Mediante el círculo de Mhor obtenga los momentos principales de inercia y los ejes principales de inercia.

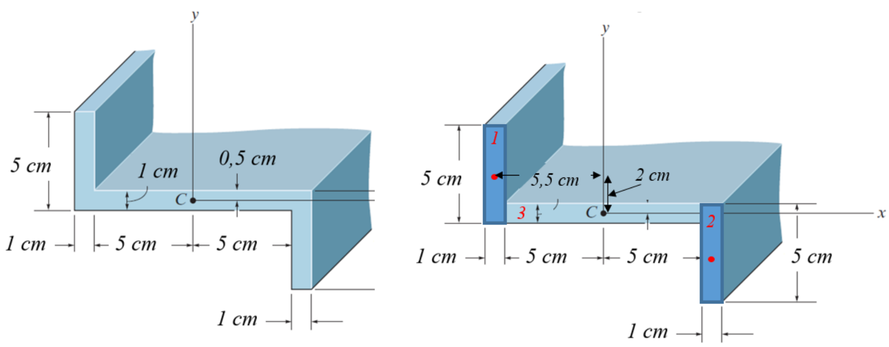


Figura 6: *Problema 2*

Solución:

La sección transversal de la viga se ha dividido en tres areas rectangulares, las secciones 1 y 2 tienen un área de $5\,cm^2$y sus centros distan $-5,5\,cm$, $2\,cm$, $5,5\,cm$, $-2\,cm$ respectivamente del centroide C de la sección transversal completa. De la simetría de la figura, los momentos de inercia y producto de inercia de las secciones 1 y 2 son iguales:

$$I_x(1) = I_x(2) = \frac{1}{12}5^3 \times 1 + 5 \times 2^2 \, cm^4 \tag{9}$$

$$I_y(1) = I_y(2) = \frac{1}{12}1^3 \times 5 + 5 \times 5,5^2 \, cm^4 \tag{10}$$

$$I_{xy}(1) = 0 + 5 \times (-5,5) \times 2 \, cm^4 \tag{11}$$

$$I_{xy}(2) = 0 + 5 \times 5,5 \times (-2) \, cm^4 \tag{12}$$

$$I_x(3) = \frac{1}{12}1^3 \times 10 \, cm^4 \tag{13}$$

$$I_y(3) = \frac{1}{12}10^3 \times 1 \, cm^4 \tag{14}$$

$$I_{xy}(3) = 0 \tag{15}$$

se ha tenido en cuenta que los productos de inercia con respecto a los ejes que pasan por los centros de gravedad de las distintas secciones son cero, dado que son secciones simétricas; así mismo se ha aplicado el teorema de Steiner para las secciones 1 y 2.

El producto de inercia total así como los momentos de inercia, es la suma de los productos y momentos de las respectivas secciones:

$$I_x(total) = I_x(1) + I_x(2) + I_x(3) = 62 \, cm^4 \tag{16}$$

$$I_y(total) = I_y(1) + I_y(2) + I_y(3) = 387 \, cm^4 \tag{17}$$

$$I_{xy}(total) = I_{xy}(1) + I_{xy}(2) + 0 = -110 \, cm^4 \tag{18}$$

Con los resultados de las ecuaciones (17),(18) y (19) construimos el círculo de Mhor

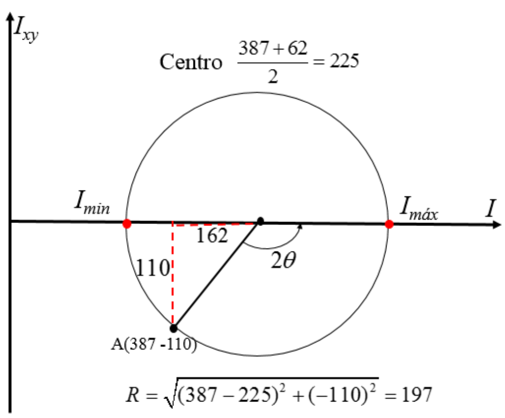


Figura 7: *Círculo de Mhor*

De la figura 9 , se deduce:

$$I(máx) = 225 + 197 = 422 \, cm^4 \, ; \, I(mín) = 225 - 197 = 28 \, cm^4 \tag{19}$$

$$2\theta = 180 - arctan\frac{110}{163} \Longrightarrow \theta = 73^{\underline{o}} \tag{20}$$

en la figura 10 se muestra la localización de los ejes principales de inercia

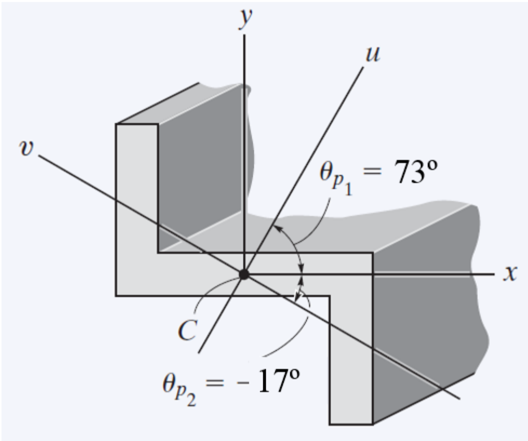


Figura 8: *Ejes principales de inercia*