Examen Segundo Parcial

(16 de diciembre de 2017)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- Explique y comente los conceptos de *«Calor» y «Temperatura»*

Consultar apuntes de clase

2.- Colocamos en un recipiente que contiene agua una esfera de plomo de masa 40 g y de volumen 20 cm^3. Densidad del plomo $\rho_{Pb} = 8,9 \times 10^3\, kg \cdot m^{-3}$. Obtenga de forma razonada la respuesta correcta de las afirmaciones que se muestran:

a) La esfera se hundirá. b) Esta esfera no es hueca. c) Flotará en el agua. d) Es una esfera hueca y se hundirá.

Solución:

En primer lugar vamos a calcular la masa de la esfera si esta fuese maciza:

$$m = V \times \rho_{Pb} = 20 \times 10^{-6} m^3 \times 8,9 \times 10^3\, kg \cdot m^{-3} = 178 \times 10^{-3}\, kg = 178\, g \tag{1}$$

por consiguiente como el enunciado nos dice que la masa es de 40 g la esfera es hueca.

Para saber si flota o se hunde, vamos a comparar el peso y el empuje.

$$W = mg = 40 \times 10^{-3} g \qquad E = 20 \times 10^{-6} m^3 \times 10^3 g = 20 \times 10^{-3} g$$

estos cálculos nos indican que el empuje es la mitad que el peso, por tanto, la esfera se hunde. La respuesta correcta es la d)

3.- Dos losas de hormigón armado de un puente de 250 m de largo se colocan justo en sus extremos, de modo que no se permite espacio para su expansión (figura 1). Si ocurre un aumento de temperatura de $20,0\,°C$, ¿cuál es la altura y a la cual las losas se elevan cuando se pandean. Datos: coeficiente de dilatación lineal del hormigón $\alpha_{hormigón} = 1,2 \times 10^{-5}\, K^{-1}$

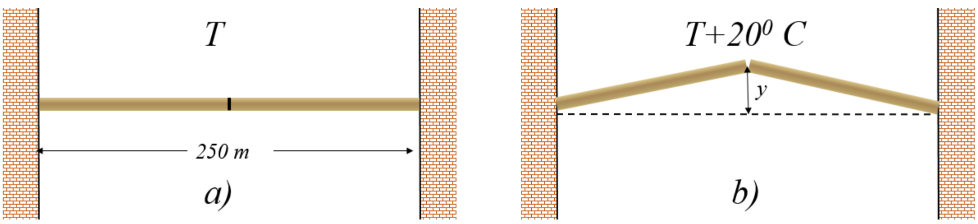

Figura 1: Cuestión 3

Solución:

En la figura 1-b se observa, sin más, que aplicar el teorema de pitágoras :

$$y = \sqrt{(L + \triangle L)^2 - L^2} \tag{2}$$

en donde $L = 125\, m$ y $\triangle L = 125\alpha\triangle T$. Desarrollando la ecuación 2 y al ser α muy pequeño $\alpha^2 \backsimeq 0$; se tiene:

$$y = \sqrt{L^2 + 2L\triangle L + \cancel{(L\triangle L)^2} - L^2} = \sqrt{2L\triangle L} = \sqrt{2 \times 125^2 \times 1,2 \times 10^{-5} \times 20} = 2,74\, m \tag{3}$$

4.-Un depósito de agua está cerrado por encima con una placa deslizante de $24\, m^2$ y $4800\, kg$ de masa. El nivel del agua en el depósito es de $7,5\, m$ de altura. Calcule la velocidad con la cual saldrá el agua a través de un pequeño orificio que se ha practicado en el depósito a una distancia de $1,50\ m$ del suelo. Tomar el valor de $g = 9,81\, ms^{-2}$,y el valor de la presión atmosférica, $P_{atm} = 10^5\ Pa$

Solución:

Aplicamos la ecuación de Bernoulli entre un punto (1) justo debajo de la placa y el otro punto (2) en la salida del orificio:

$$\cancel{P_{atm}} + \frac{mg}{A} + \cancel{\frac{1}{2}\rho V_1^2} + \rho gh = \cancel{P_{atm}} + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g0 \tag{4}$$

en donde se ha tenido en cuenta que al ser la superficie del depósito mucho mayor que la sección de orificio $V_1 \backsimeq 0$, sustituyendo los valores numéricos en la ecuación 4

$$\frac{4800g}{24} + 1000g6 = \frac{1}{2}1000V_2^2; \Longrightarrow V_2 = 11,0\, m \cdot s^{-1}$$

5.- Una nevera portátil que mide $50 \times 30 \times 35\, cm$ está formada por un material plástico de espesor $4,0\, cm$ cuya conductividad térmica es $0,010\, W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. Un día de verano se llena la nevera con hielo y bebidas a $0,0^oC$. Si la temperatura exterior es $30,5^oC$. ¿Cuánto hielo fundirá en doce horas? Calor latente de fusión del hielo $l_f = 3,34 \times 10^5 J \cdot Kg^{-1}$.

Solución:

En primer lugar vamos a proceder a calcular el área total de la caja:

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{bases} = 2(50 + 30) \times 35 + 2 \times 50 \times 30 = 8600\, cm^2 = 0,86\, m^2 \tag{5}$$

La corriente térmica, o lo que es lo mismo, la energía que fluye del exterior al interior de la caja en un segundo viene dada por:

$$H = \kappa\frac{A\Delta T}{\triangle x} = \frac{0,010\, W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \times 0,86\, m^2 \times 30,5K}{0,04\, m} = 6,56\, W$$

por tanto, la energía térmica en 12 horas viene dada:

$$Q = W \times t = 6,56 \times 12 \times 3600 = 2,83 \times 10^5 J$$

la cantidad de hielo que se fundirá, si tenemos en cuenta el calor absorbido en dicho cambio de estado:

$$Q = ml = 2,83 \times 10^5 J = m3,34 \times 10^5 J \cdot Kg^{-1}; \Longrightarrow m = 0,847\, Kg = 847\, g$$

Ejercicios Prácticos.

Problema 1-a Obtenga la posición del centroide de la lámina delgada compuesta que se muestra en la figura 3-a.

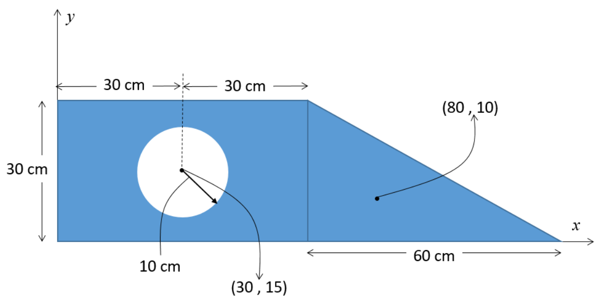

Figura 2: *Figura compuesta*

Solución:

De la figura se observa que puede descomponerse en tres figuras: un rectángulo de base 60 cm y altura 30 cm un triángulo de 60 cm de base y 30 cm de alto, un hueco circular de 10 cm de radio; cuya área consideraremos negativa. Construimos el siguiente cuadro:

Figura	$Area\ (cm^2)$	$x\ (cm)$	$y\ (cm)$	$xA\ (cm^3)$	$yA\ (cm^3)$
1	1800	30	15	54000	27000
2	900	80	10	72000	9000
3	$-314,16$	30	15	-9424	-4712
Total	$2386\ cm^2$			$116575\ cm^3$	$31288\ cm^3$

Por tanto:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{116575}{2386}, \frac{31288}{2386}) = (48,9\, cm, 13,1\, cm) \tag{6}$$

Problema 1-b La placa de la figura 3-a está hecha de acero que tiene una densidad de 8000 $kg \cdot m^{-3}$. Si el espesor de la placa es de 10 mm, determine: a) Área de dicha placa. b) Coordenadas $\bar{X}$, $\bar{Y}$ del centroide . c) Componentes horizontal y vertical de la reacción en el pasador A y la tensión en el cable B.

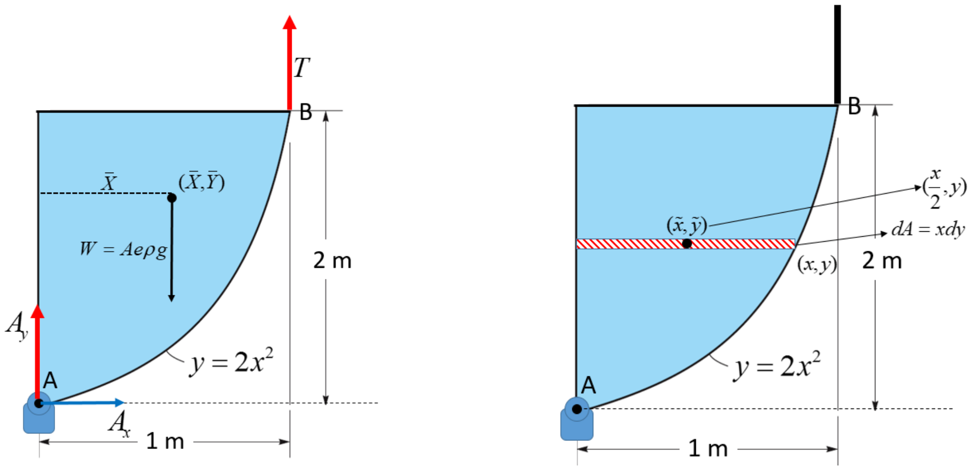

Figura 3: *Placa problema 1-b*

Solución:
De la figura 3-b , podemos obtener el área y las coordenadas del centroide de la placa:

$$A = \int_0^2 xdy = \int_0^2 2^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{4}{3}\, m^2 \tag{7}$$

La coordenada $\overline{X}$ del centroide viene dada por:

$$\overline{X} = \frac{\int \tilde{x} dA}{A} = \frac{\int_0^2 \tilde{x} xdy}{A} = \frac{\int_0^2 \frac{x}{2} xdy}{A} = \frac{\frac{1}{4}\int_0^2 ydy}{\frac{4}{3}} = 0,375\, m \tag{8}$$

Siendo la coordenada $\overline{Y}$

$$\overline{Y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{A} = \frac{\int_0^2 yxdy}{A} = \frac{\int_0^2 y 2^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy}{A} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 y^{\frac{3}{2}} dy}{\frac{4}{3}} = 1,2\, m \tag{9}$$

Ahora ya podemos calcular el peso de la placa y escribir las ecuaciones de equilibrio:

$$W = mg = V\rho g = Ae\rho g = \frac{4}{3} m^2 \times 0,01 m \times 8000 kg \cdot m^{-3} \times 9,81 m \cdot s^{-2} = 1,05 \times 10^3 N$$

Ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{gathered} A_x = 0 \\ T + A_y - 1,05 \times 10^3 = 0 \\ -1,05 \times 10^3 \times 0,375 + T \times 1 = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$T = 3,94 \times 10^2 N; \quad A_y = 6,56 \times 10^2 N; \quad A_x = 0$$

.

Problema 2 a) Dada el área plana de la figura 4-a, calcular los momentos de inercia I_x e I_y respecto de los ejes x, y cuyo origen es el punto O. b) Mediante el teorema de *Steiner,* y teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el problema 1-b, obtenga los momentos de inercia $I_{\grave{x}}$ e $I_{\grave{y}}$ respecto a los ejes que pasan por el centroide C.

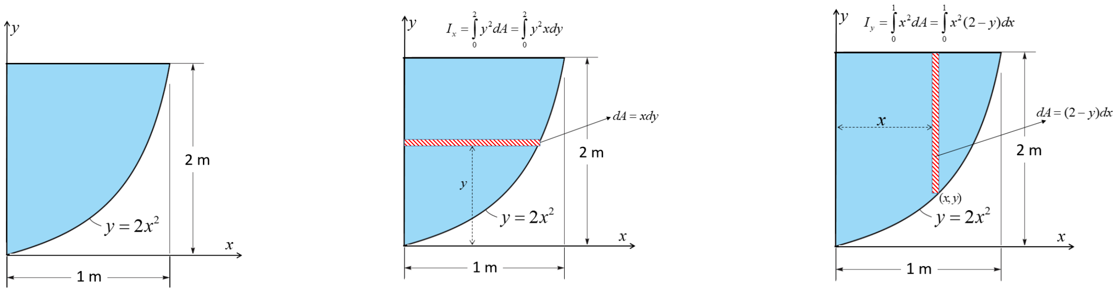

Figura 4: Problema 2

Solución a):

Teniendo en cuenta la figura 4 y la definición de momento de inercia se tiene:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^2 y^2 x dy = \int_0^2 y^2 2^{\frac{-1}{2}} y^{\frac{1}{2}} dy = 2,28\, m^4 \tag{11}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^1 x^2 (2-y) dx = \int_0^1 x^2 \left(2 - 2x^2\right) dx = 0,267\, m^4 \tag{12}$$

Solución b):

El teorema de Steiner, nos permite escribir:

$$I_x = I_{\grave{x}} + d_y^2 A \quad ; \quad I_y = I_{\grave{y}} + d_x^2 A \tag{13}$$

por consiguiente, teniendo en cuenta los resultados numéricos obtenidos en las ecuaciones 11 y 12 y en las ecuaciones 7,8 y 9 :

$$I_{\grave{x}} = 2,28 - 1,2^2 \times \frac{4}{3} = 0,360\, m^4$$

$$I_{\grave{y}} = 0,267 - 0,375^2 \times \frac{4}{3} = 7,95 \times 10^{-2}\, m^4$$

Problema 3 Para la viga, cuya sección se muestra en la figura 5. Determine: a) Posición del centroide (C) respecto de O. b) Los momentos de inercia I_x , I_y y el producto de inercia I_{xy} con respecto a los ejes X *e* Y cuyo origen es C. c) Mediante el círculo de *Mohr* obtenga los momentos principales de inercia y el ángulo que hay que girar los ejes X *e* Y para obtener los ejes principales de inercia.

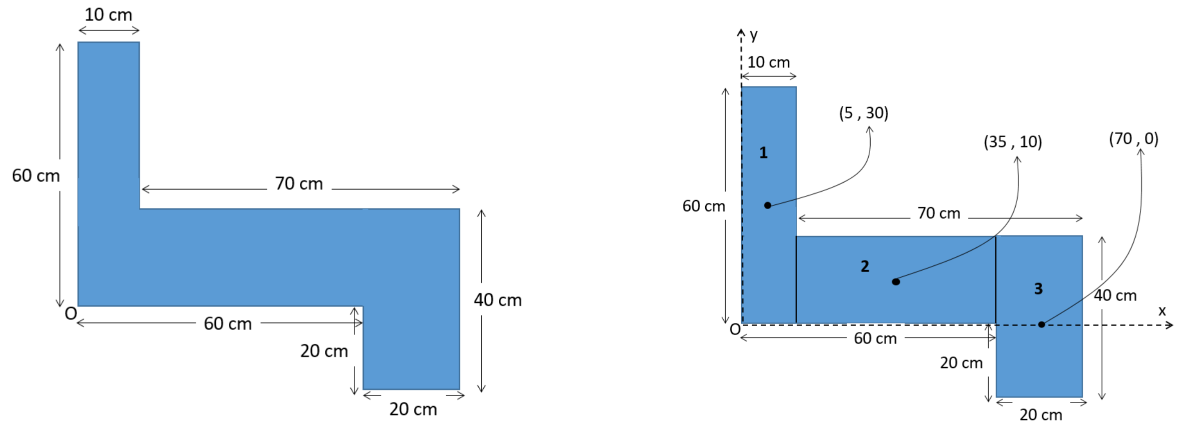

Figura 5: Problema 3

Solución :

En primer lugar calculamos la posición del centroide de la figura compuesta $(\bar{X}, \bar{Y})$

Figura	$Area\ (cm^2)$	$x\ (cm)$	$y\ (cm)$	$xA\ (cm^3)$	$yA\ (cm^3)$
1	600	5	30	3000	18000
2	1000	35	10	30000	10000
3	800	70	0	56000	0
Total	$2400\ cm^2$			$94000\ cm^3$	$28000\ cm^3$

Por tanto:

$$(\bar{X}, \bar{Y}) = (\frac{94000}{2400}, \frac{28000}{2400}) \ = (39,2\,cm, 11,7\,cm) \tag{14}$$

Como tenemos que aplicar el teorema de Steiner para calcular los momentos y productos de inercia respecto a ejes que pasan por el centroide; es necesario calcular la distancia entre los ejes que pasan por el centro de cada una de la figuras y los ejes que pasan por el centroide. En la siguiente tabla se muestran las distancias respectivas:

Figura	$d_x\ (cm)$	$d_y\ (cm)$
1	$5 - 39,2 = -34,2$	$30 - 11,7 = 18,3$
2	$30 - 39,2 = -9,2$	$10 - 11,7 = -1,7$
3	$70 - 39,2 = 30,8$	$0 - 11,7 = -11,7$

Ahora ya podemos proceder a calcular los momentos de inercia de cada una de las figuras y los momentos de inercia totales. Teniendo en cuenta que para un rectángulo la expresión del momento de inercia con respecto a ejes que pasan por su centro son:

$$
\begin{aligned}
I_{x'} &= \tfrac{1}{12} b^3 a \\
I_{y'} &= \tfrac{1}{12} a^3 b \\
I_{x'y'} &= 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

De forma sistemática realizamos las siguientes tablas:

Figura	$I_{x'}\ (cm^4)$	$I_{y'}\ (cm^4)$	$I_{x'y'}(cm^4)$
1	$\frac{1}{12}60^3 \times 10$	$\frac{1}{12}10^3 \times 60$	0
2	$\frac{1}{12}10^3 \times 30$	$\frac{1}{12}30^3 \times 10$	0
3	$\frac{1}{12}40^3 \times 20$	$\frac{1}{12}20^3 \times 40$	0

Figura	$I_x\ (cm^4) = I_{x'} + d_y^2 A$	$I_y\ (cm^4) = I_{y'} + d_x^2 A$	$I_{xy}\ (cm^4) = I_{x'y'} + d_x d_y A$
1	$\frac{1}{12}60^3 \times 10{+}18,3^2 \times 600$	$\frac{1}{12}10^3 \times 6{+}(-34,2)^2 \times 600$	$(-34,2) \times (18,3) \times 600$
2	$\frac{1}{12}10^3 \times 30{+}(-1,7 \times 1000$	$\frac{1}{12}30^3 \times 10{+}(-9,2 \times 1000$	$(-9,2) \times (-1,7) \times 1000$
3	$\frac{1}{12}40^3 \times 20{+}(-11,7)^2 \times 800$	$\frac{1}{12}20^3 \times 40{+}30,8^2 \times 800$	$(30,8) \times (-11,7) \times 800$
Total	$6,33 \times 10^5\ cm^4$	$17,2 \times 10^5\ cm^4$	$-6,57 \times 10^5\ cm^4$

El tensor de inercia correspondiente a la sección de la figura 5 es:

$$
\begin{pmatrix} 6,33 & -6,57 \\ -6,57 & 17,2 \end{pmatrix} \times 10^5\ cm^4
$$

El cálculo de los momentos pricipales y ejes principales de inercia, lo realizamos mediante el círculo de Mohr, que mostramos en la figura:

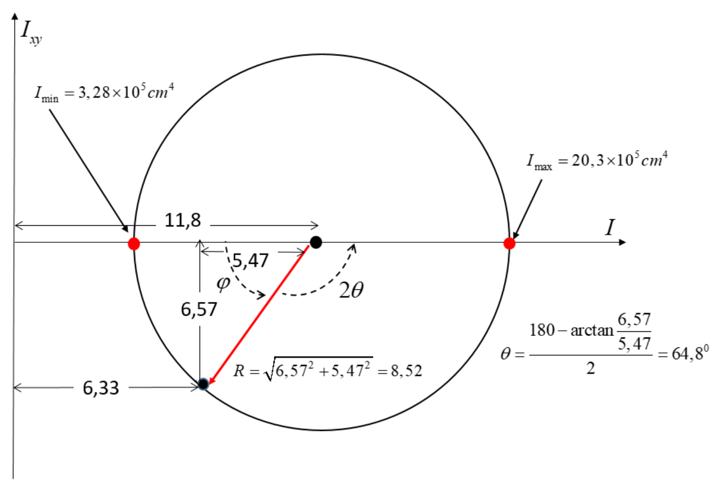

Figura 6: Circulo de Mohr

Criterios de calificación:

Todas las cuestiones tienen el mismo valor (**dos puntos**) . Hay que obtener **un mínimo de tres puntos** para poder promediar con la nota de problemas.

Problema 1.a, **un punto**, problema 1.b **dos puntos** ; problema 2, **tres punto**s, problema 3 **cuatro punto**s.

La nota del parcial se calcula mediante la siguiente expresión: $Nota = 0,4 \times NC + 0,6 \times NP$

en donde NC y NP es la puntuación obtenida en las cuestiones y problemas respectivamente.