UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA
Escuela de Arquitectura

Primer parcial FÍSICA I

Examen primer parcial

(7 de noviembre de 2015)

Cuestiones y ejercicios teóricos.

1.- a) Obtener las unidades en el S.I. (Sistema Internacional de Unidades) de la constante de gravitación universal G , que aparece en la expresión que nos muestra la fuerza con la cual se atraen dos masas m_1y m_2 que están separadas una distancia r:

$$\left|\overrightarrow{F}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que $[F] = MLT^{-2}$, despejando G de la ecuación [1]

$$[G] = \frac{MLT^{-2}LL}{MM} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

por consiguiente las unidades $[G]$ en el sistema internacional serán $kg^{-1} \cdot m^3 \cdot s^{-2}$

b) Dada la ecuación de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = cte \tag{2}$$

en donde P es la presión, ρ es la densidad de un fluido, v la velocidad , g la aceleración de la gravedad y h representa la altura respecto a un nivel de referencia.

Demuestre que dicha ecuación [2] es dimensionalmente homogénea, es decir, los tres términos que aparecen, tienen la misma ecuación de dimensiones.

La ecuación de dimensiones de cada uno de los términos que aparecen en la ecuación [2], se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} [P] &= [\tfrac{F}{S}] = \tfrac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \\ [\tfrac{1}{2}\rho v^2] &= \tfrac{M}{L^3}\left(LT^{-1}\right)^2 = ML^{-1}T^{-2} \\ [\rho gh] &= \tfrac{M}{L^3}LT^{-2}L = ML^{-1}T^{-2} \end{aligned}$$

que como podemos observar es idéntica para cada uno de los términos.

2.- Sabiendo que $1\,kp = 9,8\,N$. Exprese la presión de $3\,kp/cm^2$ en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.)

$$3\,kp/cm^2 = 3\,\frac{9,8\,N}{10^{-4}m^2} = 2,94 \cdot 10^5 N \cdot m^{-2}$$

3.- a) Defina producto escalar de dos vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ (***consultar apuntes de clase***). b) Dados los vectores:

$$\overrightarrow{a} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} + 2\,\vec{k} \qquad ; \qquad \overrightarrow{b} = 6\,\vec{i} - 8\,\vec{j}$$

Obtenga la proyección del vector $\overrightarrow{a}$ sobre el vector $\overrightarrow{b}$.

$$P_{\vec{a}_{\vec{b}}} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{2 \times 6 + (-3) \times (-8)}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = 3,6$$

4.- a) Defina producto vectorial de dos vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ (***consultar apuntes de clase***). b) Obtenga el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ dados en la cuestión 3. Compruebe que dicho vector $\overrightarrow{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{a}$ y al vector $\overrightarrow{b}$.

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 2 \\ 6 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 16\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k}$$

para comprobar que el vector $\overrightarrow{c}$ es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, efectuamos el producto escalar, y este producto tiene que ser cero; en efecto:

$$\vec{c} \bullet \vec{b} = 16 \times 6 + 12 \times (-8) + 2 \times 0 = 0$$

$$\vec{c} \bullet \vec{a} = 16 \times 2 + 12 \times (-3) + 2 \times 2 = 0$$

5.- a) Defina momento de una fuerza $\overrightarrow{F}$ respecto a un punto O . b) Defina momento de una fuerza $\overrightarrow{F}$ respecto a un eje

(***consultar apuntes de clase***)

Ejercicios Prácticos.

Problema 1 Calcule las tensiones de los cables AB y AC, sabiendo que la masa de la caja que soportan es de $100\,kg$

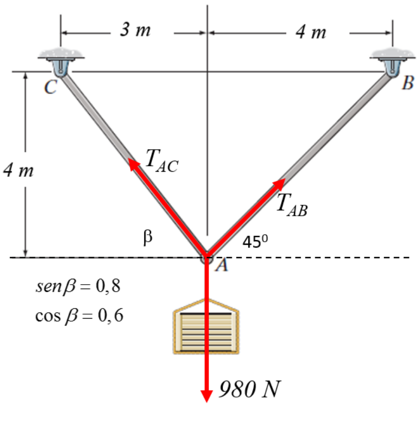

Figura 1: *Masa que cuelga de dos cables y diagrama de cuerpo libre en el punto A*

Si el punto A está en equilibrio, se tiene que cumplir que la suma de las tres fuerzas sea cero, es decir, la suma de fuerzas en el eje X tiene que ser cero, como también tiene que ser cero el sumatorio en el eje Y

$$\begin{aligned} T_{AB}\tfrac{\sqrt{2}}{2} - T_{AC} \cdot 0,6 = 0 \\ T_{AB}\tfrac{\sqrt{2}}{2} + T_{AC} \cdot 0,8 - 980 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones [3], se tiene:

$$T_{AB} = 592\,N\ ;\ T_{AC} = 700\,N$$

Problema 2 Determine la magnitud del momento de la fuerza $\vec{F} = -200\,\vec{i} + 150\,\vec{j} + 300\,\vec{k}\,N$ Con respecto al eje OA.

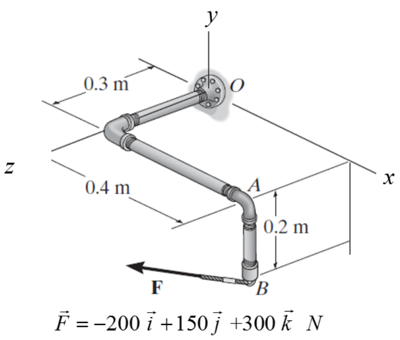

Figura 2: *Problema 2*

En primer lugar vamos a determinar las coordenadas de los puntos O, A, B

$$O(0,0,0);\ A(0{,}4, 0, 0{,}3)m\ B(0{,}4, -0{,}2, 0{,}3)m \tag{4}$$

por consiguiente los vectores vienen dados por:

$$\overrightarrow{AB} = -0,2\,\vec{j}\,m \qquad \overrightarrow{OA} = 0,4\vec{i} + 0,3\vec{k}\,m \tag{5}$$

Calculamos en primer lugar el momento de la fuerza $\vec{F}$ con respecto a un punto cualquiera del eje, en este caso vamos a tomar el punto A entonces aplicando la definición de momento respecto de un punto, se tiene:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -0,2 & 0 \\ -200 & 150 & 300 \end{vmatrix} = -60\vec{i} - 40\vec{k}\,N \cdot m \tag{6}$$

y ahora realizamos la proyección sobre el eje OA,

$$M_{eje} = \frac{\overrightarrow{M_A} \bullet \overrightarrow{OA}}{\left|\sqrt{0,4^2 + 0,3^2}\right|} = \frac{-60 \times 0,4 + (-40) \times 0,3}{0,5} = -72\,N \cdot m$$

se llega al mismo resultado, efectuando el producto mixto de los vectores:

$$\left\{\vec{u}_{OA}, \overrightarrow{AB}, \vec{F}\right\} = \begin{vmatrix} 0,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & -0,2 & 0 \\ -200 & 150 & 300 \end{vmatrix} = -72\,N \cdot m$$

Problema 3 Calcule la resultante de las tres fuerzas que ejercen los tres cables sobre la antena de la figura. Obtenga los ángulos que dicha resultante forma con cada uno de los ejes coordenados.

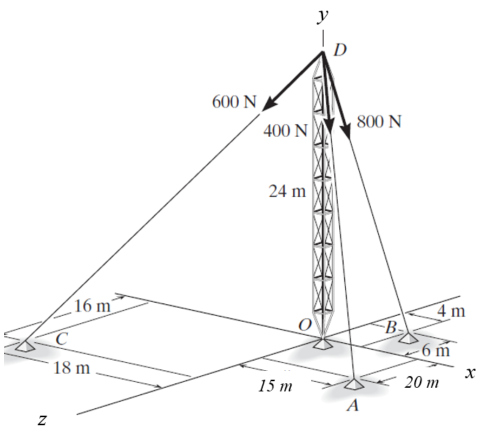

Figura 3: *Antena sujeta por tres cables*

De la figura, obtenemos las coordenadas de los puntos:

$$D(0,24,0)\,,\ A(15,0,20)\,,\ B(4,0,-6)\,,\ C(-18,0,16)$$

a continuación escribimos los vectores que nos dan las direcciones de cada una de las fuerzas:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA} &= 15\vec{i} - 24\vec{j} + 20\vec{k};\ \left|\overrightarrow{DA}\right| = 34,65\,m\\ \overrightarrow{DB} &= 4\vec{i} - 24\vec{j} - 6\vec{k};\ \left|\overrightarrow{DB}\right| = 24,84\,m\\ \overrightarrow{DC} &= -18\vec{i} - 24\vec{j} + 16\vec{k};\ \left|\overrightarrow{DC}\right| = 34\,m\end{aligned} \tag{7}$$

podemos obtener ahora la expresión cartesiana de cada fuerza:

$$\vec{F}_{DA} = 400\frac{1}{34,65}\left(15\vec{i} - 24\vec{j} + 20\vec{k}\right) = 173\vec{i} - 277\vec{j} + 231\vec{k}\,N \tag{8}$$

$$\vec{F}_{DB} = 800\frac{1}{24,84}\left(4\vec{i} - 24\vec{j} - 6\vec{k}\right) = 129\vec{i} - 773\vec{j} - 193\vec{k}\,N \tag{9}$$

$$\vec{F}_{DC} = 600\frac{1}{34}\left(-18\vec{i} - 24\vec{j} + 16\vec{k}\right) = -318\vec{i} - 423\vec{j} + 282\vec{k}\,N \tag{10}$$

sumando las ecuaciones 8,9 y 10

$$\vec{R} = -16\vec{i} - 1473\vec{j} + 320\vec{k}\,N;\ \left|\vec{R}\right| = 1507\,N$$

$$\vec{u}_R = \frac{-16}{1507}\vec{i} - \frac{1473}{1507}\vec{j} + \frac{320}{1507}\vec{k}$$

los ángulos que la resultante forma con los ejes vienen dados por

$$\theta_x = arcos\frac{-16}{1507} = 90,61^{o},\quad \theta_y = arcos\frac{-1473}{1507} = 167,81^{o};\quad \theta_z = arcos\frac{320}{1507} = 77,74$$

Problema 4 El brazo de la grúa se sostiene mediante una articulación C y un cable AB . Obtenga las reacciones en la articulación y la tensión del cable; suponiendo que el brazo de la grúa pesa $1000\,N$ y que el peso que está soportando es de $800\,N$,

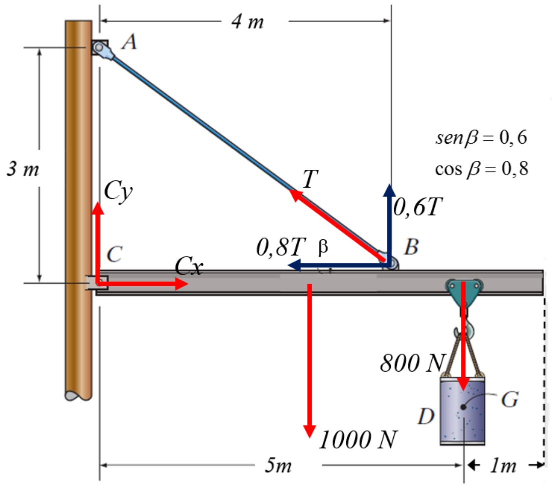

Figura 4: *Grúa problema 4*

En la figura aparece representado el diagrama del cuerpo libre para el brazo de la grúa. Puede observarse que existen tres incógnitas: las reacciones en la articulación C; $C_x C_y$ y la tensión del cable T, como podemos escribir tres ecuaciones ($\sum F_x = 0; \sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$) para que el sistema esté en equilibrio, el problema lo tenemos totalmente determinado:

$$\begin{gathered} C_x - 0,8T = 0 \\ C_y + 0,6T - 1000 - 800 = 0 \\ 0,6T \times 4 - 1000 \times 3 - 800 \times 5 = 0 \end{gathered} \tag{11}$$

en donde, por comodidad, hemos tomado momentos respecto al punto C, la resolución de este sistema de ecuaciones nos da:

$$C_x = 2333\,N, \quad C_y = 50\,N, \quad T = 2917\,N$$

Problema 5 La armadura, que se ha utilizado para soportar un balcón, está sometida a la carga mostrada. Determine la fuerza en cada elemento. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

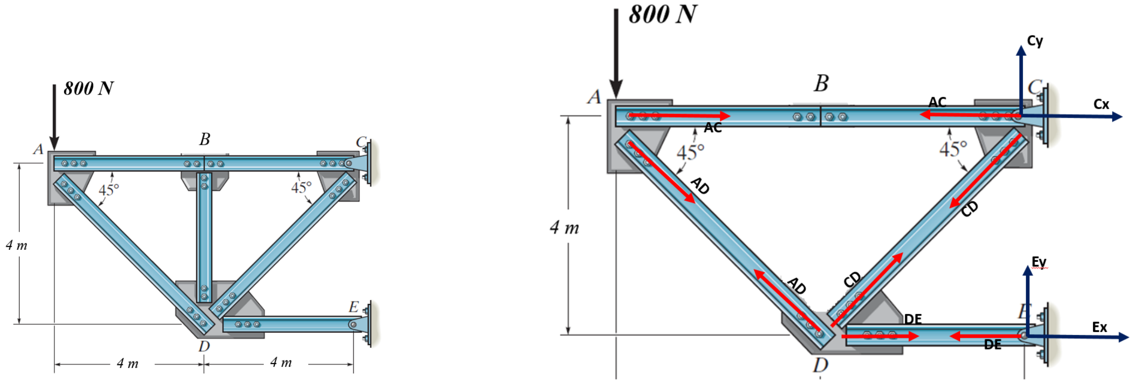

Figura 5: *Armadura que mantiene un balcón*

En la figura de la derecha se muestran las fuerzas (se han dibujando todas ellas en tensión) en cada uno de los nudos, así mismo puede observarse que se ha eliminado el elemento BD por ser un elemento de fuerza cero.

Escribimos las ecuaciones de equilibrio para cada uno de los nudos:

$$nodo\ A \begin{cases} AC + \frac{\sqrt{2}}{2}AD = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}AD = 800 \end{cases}$$

$$nodo\ C \begin{cases} -AC - \frac{\sqrt{2}}{2}CD + C_x = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}CD + C_y = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ D \begin{cases} DE + \frac{\sqrt{2}}{2}CD - \frac{\sqrt{2}}{2}AD = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}AD + \frac{\sqrt{2}}{2}CD = 0 \end{cases}$$

$$nodo\ E \begin{cases} -DE + E_x = 0 \\ E_y = 0 \end{cases}$$

Con las 8 ecuaciones anteriores formamos el sistema matricial de la figura

Nodo	AC	AD	CD	DE	C_x	C_y	E_x	E_y	Indepe
A	1	0,707	0	0	0	0	0	0	0
	0	-0,707	0	0	0	0	0	0	800
C	-1	0	-0,707	0	1	0	0	0	0
	0	0	-0,707	0	0	1	0	0	0
D	0	-0,707	0,707	1	0	0	0	0	0
	0	0,707	0,707	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	-1	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Figura 6: *Sistema de ecuaciones en forma matricial*

siendo su solución:

AC	=	800	N	Tensión
AD	=	-1131	N	Compresión
CD	=	1131	N	Tensión
DE	=	-1600	N	Compresión
CX	=	1600	N	
Cy	=	800	N	
Ex	=	-1600	N	
Ey	=	0	N	

Figura 7: *Solución sistema de ecuaciones.*

Criterios de calificación:

Cuestion 1 (3 puntos) , cuestión 2 (1 punto), cuestiones 3,4 y 5 (2 puntos cada una) . Hay que obtener **un mínimo de 4 puntos** para poder promediar con la nota de problemas.

Problemas 1 y 4 (2 puntos cada uno) , problemas 2 y 3 (1,5 puntos cada uno), problema 5 (3 puntos).

La nota del parcial se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Nota = 0,3 \times NC + 0,7 \times NP$$

en donde NC y NP es la puntuación obtenida en las cuestiones y problemas respectivamente.